Universidade de Aveiro Departamento de Matemática
2008

ANABELA VALÉRIO MARRAFA MACEDO

PAVIMENTAÇÕES PLANARES POR PENTÁGONOS CONVEXOS E EQUILÁTEROS

Universidade de Aveiro Departamento de Matemática
2008

ANABELA VALÉRIO MARRAFA MACEDO

PAVIMENTAÇÕES PLANARES POR PENTÁGONOS CONVEXOS E EQUILÁTEROS

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Ensino de Matemática, realizada sob a orientação científica da Professora Doutora Ana Maria Reis de Azevedo Breda, Professora associada com agregação do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro.

Dedico este trabalho ao meu marido e filho pela compreensão de eu não ter estado mais tempo com eles, devido à realização deste trabalho.

o júri

presidente

Doutor Helmuth Robert Malonek,
Professor Catedrático da Universidade de Aveiro

Doutora Ana Maria Reis d´Ázevedo Breda
Professora Associada, com Agregação da Universidade de Aveiro (Orientadora)

Doutora Maria do Rosário Machado Lema Sinde Pinto
Professora Auxiliar da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

agradecimentos

À minha orientadora, Professora Ana Breda pelo seu apoio, pelas suas sugestões e pelos seus ensinamentos, que me ajudaram a concretizar este trabalho. De referir ainda o óptimo ambiente de trabalho, proporcionado pela sua simpatia e disponibilidade.

palavras-chave

Polígonos convexos e equiláteros, pavimentações por pentágonos convexos e equiláteros e região admissível.

resumo

O presente trabalho propõe-se apresentar um estudo sobre os pentágonos convexos e equiláteros que pavimentam o plano, baseado no documento " Equilateral Convex Pentagons Wich Tile the Plane" da autoria conjunta de M. D. Hirschhorn e D. C. Hunt

Um polígono convexo é um protótipo se os polígonos congruentes àquele polígono pavimentarem o plano sem fendas ou sobreposições. Este é o mote do trabalho que apresentamos. Vamos estudar o caso particular dos pentágonos convexos e equiláteros que pavimentam o plano.

A existência de vários pentágonos que pavimentam o plano e a variedade de métodos de tentativa de solucionar o problema da pavimentação do plano por pentágonos, tem como consequência, por exemplo, no caso particular das pavimentações planares por pentágonos convexos e equiláteros, a importância de estudar as condições necessária e suficientes para que haja uma pavimentação.

O artigo que elegemos para o desenvolvimento do trablaho que se apresenta, foi o já referido " Equilateral Convex Pentagons Which Tile the Plane". Nele conseguimos estudar a geometria dos pentágonos convexos e e equiláteros que pavimentam o plano.

Neste trabalho fixamo-nos nos pentágonos convexos e equiláteros e construtivamente vamos apresentando condições sobre os seus ângulos e suas consequências, realizando as demonstrações possíveis dos resultados que vão constituindo a base do conhecimento sobre os pentágonos estudados, recorrendo à construção de representações que a suportam, para desta forma construirmos protótipos. Após a apresentação de um método para a determinação dos pentágonos convexos e equiláteros que pavimentam o plano e as suas consequências, são identificados os tipos de pentágonos que pavimentam o plano. Para cada um dos tipos de pentágonos são apresentados exemplos e demonstrado o facto de que um protótipo poder pavimentar o plano de diversas formas.

keywords

Convex and equilateral polygons, tiling the plane with congruent equilateral convex pentagons and admissable region.

abstract

With the present work it is intended to show a study on convex equilateral pentagons which tile the plane, based on the document " Equilateral Convex Pentagons Which Tile the Plane", by M. D. Hirschhorn and D. C. Hunt.

A convex polygon is a prototype if the congruent polygons to that same polygon tile the plane without gaps or overlaps. This is the theme of the work presented here. We are going to study the particular case of convex equilateral pentagons which tile the plane.

The existence of the several pentagons which tile the plane and the variety of methods try the solve the tiling of the plane by pentagons, has a consequence, for example in the particular case of the tiling, by convex equilateral pentagons, the importance of studying the necessary and sufficient conditions in order that there is a tiling.

The article selected to development of the present work is the one referred before, "Equilateral Convex Pentagons Which Tile the Plane". This article made us possible to study the geometry of equilateral convex pentagons which tile the plane.

In this work we contemplate the equilateral convex pentagons and, constructively we will present conditions about its angles and its consequences realizing the possible demonstrations of the results which constitute the basis of the knowledge about the studied pentagons. We will recur to the construction of the representations which support theme in a way that we can build prototypes. After the presentation of one method to the determination of equilateral convex pentagons which tile the plane and its consequences the different types of pentagons which tile the plane are identified. To each type of pentagons there will be presented examples and the fact that a prototype can tile the plane in different ways will be demonstrated.

INTRODUÇÃO

Um pentágono convexo é um protótipo se os polígonos congruentes àquele polígono pavimentarem o plano sem fendas ou sobreposições. Este é o mote do trabalho que apresentamos. Vamos estudar o caso particular dos pentágonos convexos e equiláteros que pavimentam o plano.

Doris Schattschneider, no seu artigo " Tiling the Plane with Congruent Pentagons", afirma que em 1968, suponha-se que todos os pentágonos que pavimentam o plano estavam tipificados, por R. Kershener. Mais tarde, foram identificados outros pentágonos que pavimentam o plano e que não tinham sido identificados por R. Kershener. Por outro lado, este artigo revela o interesse de pessoas, suscitado ao longo dos anos, pelo tema das pavimentações por pentágonos. Entre elas, K. Reinhardt, Heesch, Kienzle, B. Grünbaum, G.C. Shepard, Kershener, Mickel Hirschhorn e Marjorie Rice.

Na página da internet[1], assinada por Marjorie Rice, esta afirma que o seu interesse pelo tema das pavimentações por pentágonos foi despertado pela leitura de um artigo da autoria de Martin Gardner no Scientific American, despertou-lhe o interesse para as pavimentações por pentágonos. Afirma ainda que desenvolveu uma notação própria para sistematizar a pesquisa de novos pentágonos que pavimentassem o plano. O seu trabalho foi contemplado com a descoberta de mais quatro tipos de protótipos.

A existência de vários pentágonos que pavimentam o plano e a variedade de métodos para solucionar o problema da identificação dos pentágonos que pavimentam o plano, implicam a necessidade de identificar as condições necessárias e suficientes para que haja uma pavimentação. No caso particular das pavimentações planares por pentágonos convexos e equiláteros, essas condições são apresentadas sob a forma de um teorema e demonstrado, no artigo "Equilateral Convex Pentagons Witch Tile the Plane", da autoria conjunta de M.D. Hirschhorn e D. C. Hunt.

O artigo que elegemos para o desenvolvimento do trabalho que se apresenta, foi o já referido, "Equilateral Convex Pentagons Which Tile the Plane". Nele conseguimos estudar a geometria dos pentágonos convexos e equiláteros que pavimentam o plano.

---

[1]: http://tessellations.home.comcast.net/~tessellations/

Neste trabalho fixamo-nos nos pentágonos convexos e equiláteros, e construtivamente vamos apresentando condições sobre os seus ângulos e suas consequências, realizando as demonstrações possíveis dos resultados que vão constituindo a base do conhecimento sobre os pentágonos estudados, recorrendo à construção de representações que as suportam, para desta forma construirmos protótipos.

O trabalho aqui apresentado encontra-se dividido em duas partes. Na parte I (das páginas 5 à 31) estudamos as condições angulares em pentágonos convexos e equiláteros. Esta primeira parte está dividida em três pontos. No primeiro estabelecemos as condições anteriores, no segundo, identificamos a região de admissibilidade para a construção de um pentágono convexo e equilátero que pavimenta o plano, definida por dois dos seus ângulos, o maior e o menor e por fim identificamos os intervalos de variação dos restantes ângulos, partindo do intervalo de variação do maior ângulo.

Na parte II, são identificados os pentágonos convexos e equiláteros que pavimentam o plano, com base nos seus ângulos internos. De seguida, são estabelecidas as suas consequências e apresentado um método para a determinação das condições suficientes para que um pentágono convexo e equilátero pavimente o plano. Com base neste método são eliminadas as condições que são verificadas por pentágonos que não pavimentam o plano, restando um conjunto de condições. Dentro deste conjunto são estabelecidas e demonstradas relações de equivalência entre condições.

Com base nas condições que restaram, são identificados alguns tipos de pentágonos convexos e equiláteros que pavimentam o plano. Esta identificação foi baseada na equivalência de condições envolvendo os ângulos do pentágono. Na parte final, são apresentados apenas três conjuntos de condições, sendo dois deles eliminados por incompatibilidade de condições. Desta forma, são reveladas as condições que definem os pentágonos convexos e equiláteros que pavimentam o plano. Para cada um dos tipos de pentágonos, são apresentados exemplos e demonstrado o facto de que um protótipo, pode pavimentar o plano de diversas formas.

PARTE I

ESTUDO DAS CONDIÇÕES ANGULARES EM PENTÁGONOS CONVEXOS E EQUILÁTEROS

Vamos começar por analisar as condições que os ângulos internos de um pentágono convexo equilátero devem verificar. De seguida, iremos identificar a região de admissibilidade angular para a construção desta classe de pentágonos, indicando a variação dos respectivos ângulos internos.

1. CONDIÇÕES ANGULARES EM PENTÁGONOS CONVEXOS E QUILÁTEROS

No que se segue, sempre que nos referirmos aos ângulos: A, B, C, D e E, de um pentágono convexo e equilátero, queremos referir-nos às amplitudes dos seus ângulos internos de vértices em A, B, C, D e E, respectivamente.

Sem perda de generalidade, vamos assumir que os pentágonos em estudo têm de lado uma unidade e que os ângulos: A, B, C, D e E, são identificados de forma circular, cumprindo os seguintes requisitos:

O ângulo B é o maior de todos;

Os ângulos A e C são ângulos adjacentes ao ângulo B, com $A \leq C$;

Os restantes ângulos são identificados (ordenados) por E e D, de forma circular.

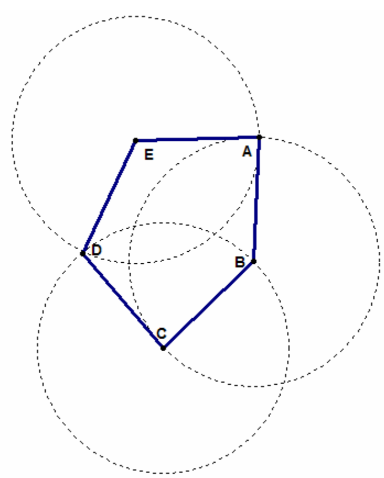


Figura 1

Dos requisitos anteriores, obtemos o seguinte resultado:

Proposição 1. $A \leq C \leq D \leq E \leq B$.

Demonstração**:**

Começamos por fixar o ângulo B e por hipótese temos que $A \leq C$. Partindo do valor máximo para o ângulo A, vejamos o que sucede com os restantes ângulos.

Como estamos a supor que $A \leq C$, então o valor máximo para A é C (ver Figura 2).

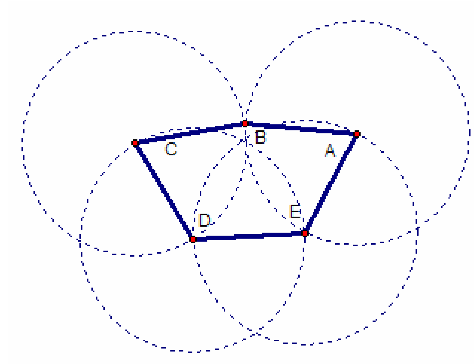


Figura 2

Consideremos a recta s (ver Figura 3) que contém a bissectriz do ângulo interno em B. Sabemos que o pentágono tem os lados iguais, que $A = C$ e que a bissectriz referida divide o ângulo em B em dois ângulos geometricamente iguais. Nestas condições, podemos afirmar que, então, a recta que contém a bissectriz do ângulo em B, se comporta como eixo de simetria do pentágono. Logo, $D = E$ e $s \perp [DE]$.

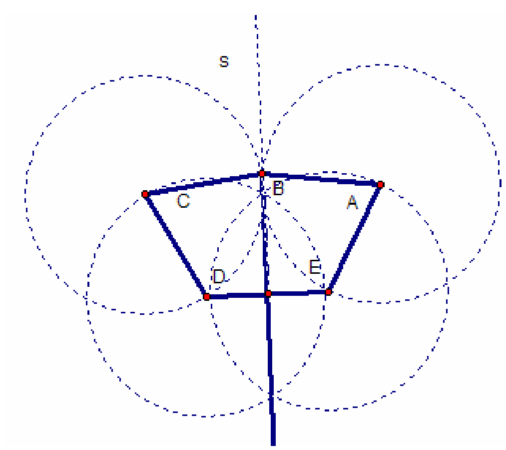


Figura 3

Vamos agora analisar os efeitos sobre os outros ângulos, quando variamos o ângulo em A, a partir do seu valor máximo C (ver Figura 4).

Com base nesta variação, começamos por mostrar que $C \leq D$.

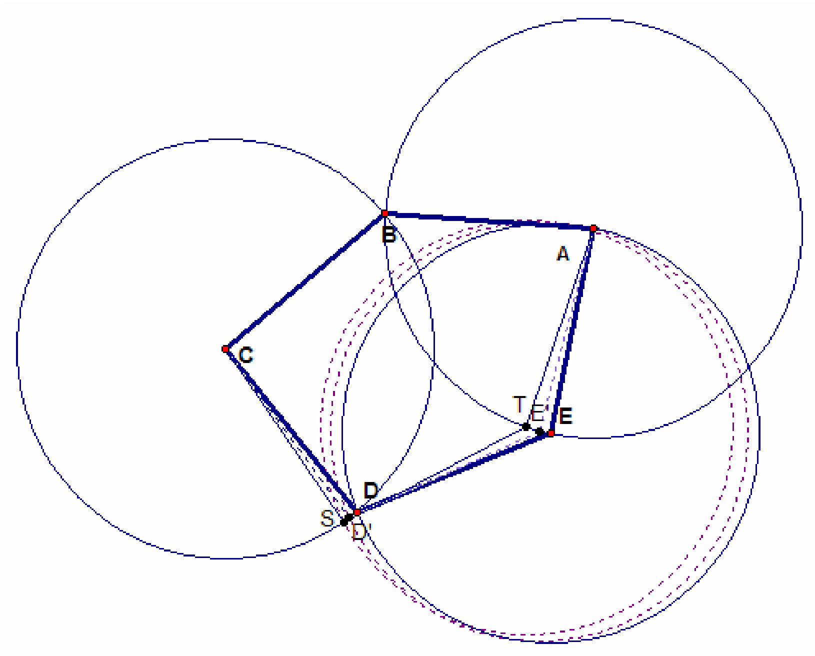


Figura 4

Como o ângulo B é fixo, então também estão fixos os lados: $[AB]$ e $[CB]$ do pentágono.

O vértice em E pertence à circunferência de centro A e raio igual à unidade, por construção, assim como o vértice D pertence, por exemplo, à circunferência unitária de centro C.

A variação do ângulo A, a partir do seu valor máximo, é possível através da variação do ângulo E.

Façamos diminuir o ângulo A (através do aumento do ângulo E). Designemos por X as sucessivas posições do vértice em E. O vértice em X percorre o arco ET (interior ao pentágono inicial), onde E é a posição inicial do vértice X e T é o ponto para o qual o ângulo E é máximo, que é por hipótese o ângulo fixo B, pois este é o maior de todos os ângulos. Assim o ângulo em E aumenta até ficar igual ao ângulo fixo B. Seja E' uma posição intermédia para X.

A variação do ângulo E reflecte-se numa variação do ângulo D.

Designemos por Y as sucessivas posições do vértice em D, correspondentes às sucessivas posições do ângulo X. O vértice em Y pertence, por exemplo, à circunferência unitária de centro C e percorre o arco DS (exterior ao pentágono inicial). A amplitude em Y começa por ser D, na posição inicial do vértice D, diminuindo até S, o que corresponde ao valor mínimo para Y. Esta posição S corresponde à posição máxima de X em T. Seja D` a posição intermédia do ângulo Y correspondente à posição E`. O ângulo em D diminui, uma vez que o vértice em E se aproxima do vértice em C, obrigando a que o ângulo D diminua.

Obrigatoriamente o ângulo C aumenta.

Por outro lado, vejamos agora qual o valor mínimo para o ângulo D (ver Figura 5)

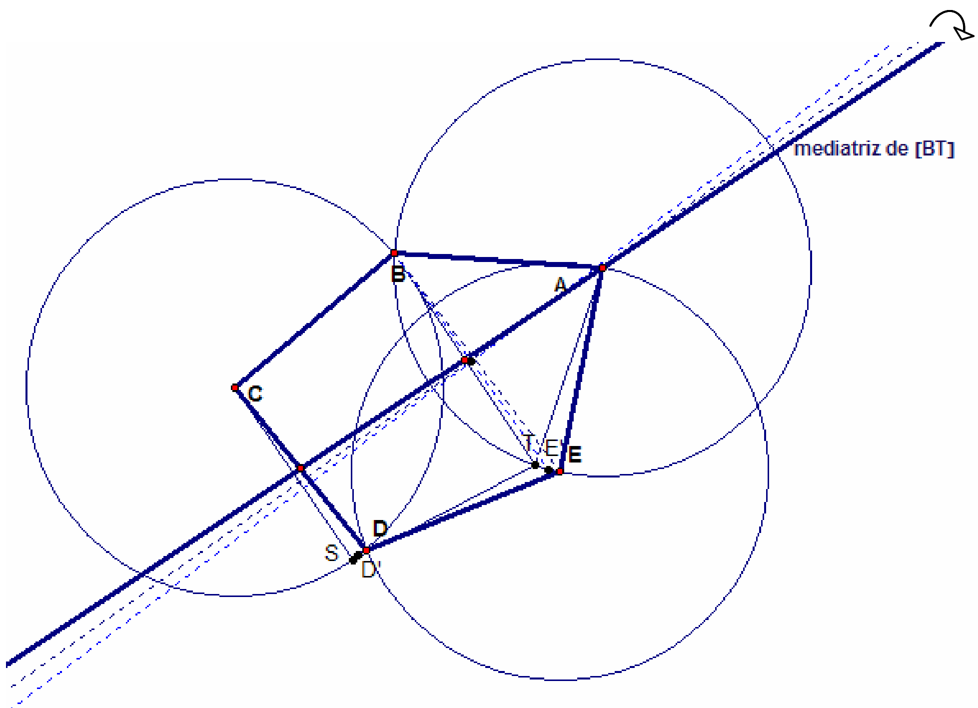


Figura 5

O ângulo A, partindo do seu valor máximo diminui até ao mínimo. A este valor mínimo corresponde um valor máximo do ângulo E e sabemos que este é igual ao ângulo fixo B. Considerando as sucessivas mediatrizes do $[BX]$, na situação limite, a mediatriz do $[BT]$ contém a bissectriz do ângulo em A e os ângulos B e T são iguais. Como o pentágono é equilátero então esta mediatriz é eixo de simetria do pentágono, logo, o ângulo D é mínimo e coincide com o ângulo C. Podemos então concluir que $C \leq D$.

Partindo ainda da situação limite do ângulo A ser máximo e igual a C, vamos agora demonstrar que $D \leq E$.

Consideremos o ângulo A na situação limite do ser máximo e igual a C. Esta situação corresponde aos ângulos D e E serem iguais (ver figura 3). Fazendo diminuir o ângulo A, o ângulo E aumenta até ao máximo de B e em simultâneo, o ângulo D diminui até ao mínimo de C. Este mínimo é atingido quando o ângulo em E é máximo e igual a B (ver Figura 4).

Observemos a Figura 6. Na situação limite, o vértice T pertence à mediatriz do $[AS]$ e à circunferência unitária de centro em A. Esta mediatriz contém a bissectriz do ângulo em T. Como o vértice S está mais afastado do vértice A do que o vértice T, então o ângulo S é inferior ao ângulo T. Assim, podemos concluir que $D \leq E$.

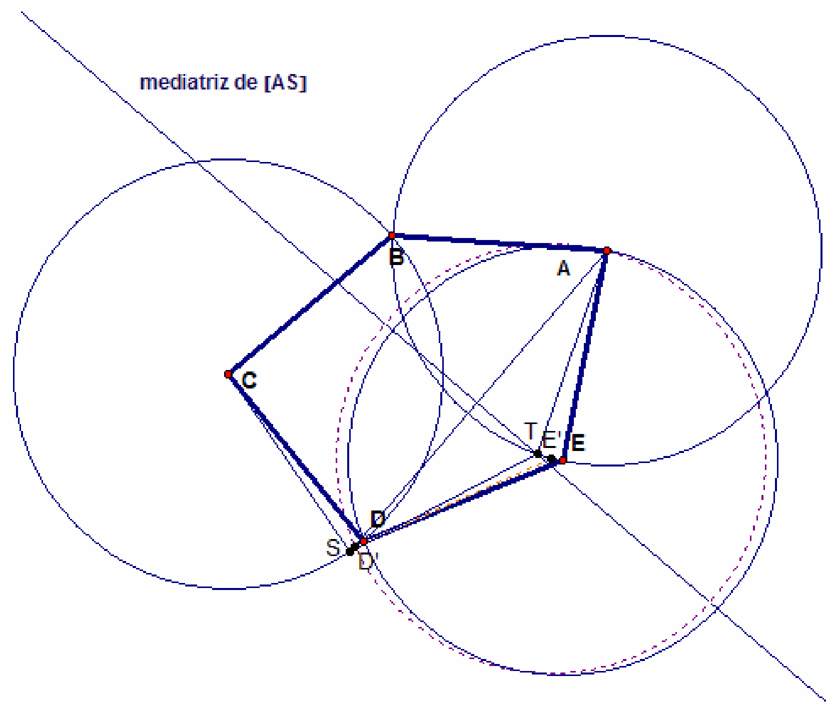


Figura 6

Finalizando, sabemos que por hipótese o ângulo B é o maior dos ângulos, logo $E \leq B$.

Podemos então afirmar que as desigualdades $A \leq C \leq D \leq E \leq B$, são verdadeiras.

Resumindo as condições estabelecidas, podemos afirmar que:

B é o ângulo de maior amplitude;

Os ângulos A e C são ângulos adjacentes ao ângulo B, com $A \leq C$;

Os restantes ângulos são identificados (ordenados) por E e D, de forma circular;

$A \leq C \leq D \leq E \leq B$;

Quando a amplitude do ângulo A é mínima, temos: $C = D$ e $E = B$;

Quando a amplitude do ângulo A é máxima, temos: $A = C$ e $D = E$;

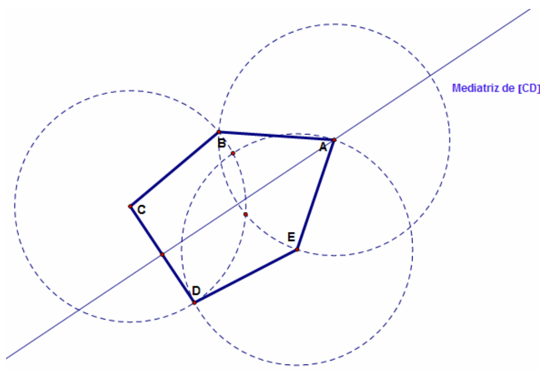


Figura 7

O valor do ângulo A é mínimo, $C=D$ e $E=B$

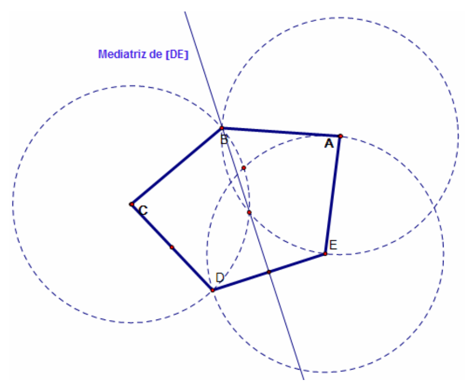


Figura 8

O valor do ângulo A é máximo, $A=C$ e $D=E$

Na proposição seguinte vamos estabelecer novas relações de ordem, envolvendo os ângulos internos do pentágono.

Proposição 2:

$i)$ $108º \leq B < 180º$;

$$ii)\ A \leq 180º - \frac{1}{2}B - arcsin(\sin(\frac{1}{2}B) - \frac{1}{2});$$

$$iii)\ 180º - B + 2arcsin(\frac{1}{4\sin(\frac{1}{2}B)}) \leq A;$$

Demonstração:

$i)$ $108º \leq B < 180º$.

Por hipótese o maior dos ângulos é B e sabemos que a soma das amplitudes dos ângulos internos de um polígono com n lados é dada pela expressão $(n-2)\times 180^{\circ}$. Em particular no caso de um pentágono essa soma é de 540º. Suponhamos por redução ao absurdo que $B < 108^{\circ}$. A soma $A+B+C+D+E$ seria inferior a $5\times 108^{\circ}$, isto é $A+B+C+D+E < 540^{\circ}$, o que é absurdo. Assim, $B \geq 108^{\circ}$. Por outro lado, se $B \geq 180^{\circ}$, então B poderia ser igual a 180º, degenerando o pentágono num quadrilátero, que não interessa para o nosso estudo. Se $B > 180^{\circ}$, então neste caso, o pentágono deixaria de ser convexo, o que seria absurdo.

$$ii)\ A \leq 180^{\circ} - \frac{1}{2}B - arcsin(\sin(\frac{1}{2}B) - \frac{1}{2}).$$

Já vimos que o valor máximo para o ângulo A ocorre na situação em que $A = C$ e $D = E$. Partindo desta situação, vamos determinar o valor máximo de A em função do ângulo B. Na figura 9, está representada a situação para a qual o ângulo A é máximo.

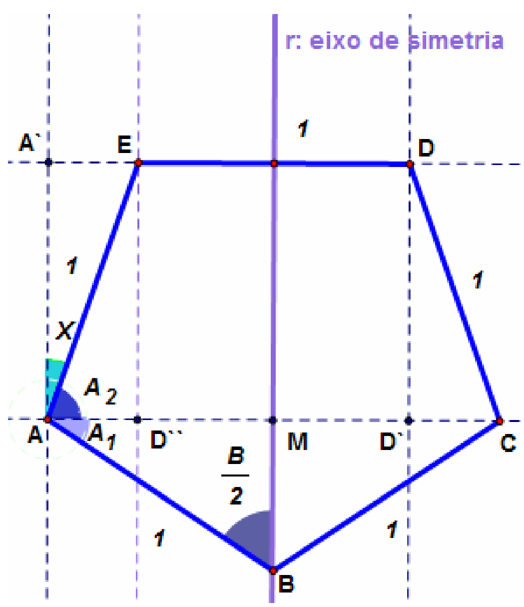


Figura 9

O valor do ângulo A é máximo, para $A=C$ e $D=E$

$$A_1 = B\hat{A}M = 90^{\circ} - \frac{B}{2};\ A_2 = E\hat{A}M = A + \frac{B}{2} - 90^{\circ};\ X = 180^{\circ} - \left(A + \frac{B}{2}\right)$$

Consideremos o pentágono convexo e equilátero $[ABCDE]$, onde o ângulo A toma o seu valor máximo, isto é, $A = C$. Já vimos que, então, $D = E$. Nesta situação o eixo de simetria, r, passa pelo vértice B.

Consideremos ainda a diagonal do pentágono que une os vértices A e C. Sabemos que o eixo de simetria r é perpendicular a $[AC]$. Tracemos as rectas perpendiculares a $[AC]$ e que passam pelos vértices E e D. Sejam D' e D'', os pontos de intersecção daquelas rectas com $[AC]$, respectivamente.

O triângulo $\triangle[DD`C]$ é geometricamente igual ao triângulo $[ED``A]$, porque r é o eixo de simetria do $[ED]$ e D`` é o simétrico de D` em relação ao eixo r.

Por outro lado, $\triangle[AD``E]$ é geometricamente igual ao $\triangle[AA`E]$, porque têm os três lados iguais.

O eixo r é o eixo de simetria do pentágono. Seja M o ponto de intersecção deste eixo de simetria com o $[AC]$.

Consideremos o $\triangle[AMB]$. É um triângulo rectângulo em M e $A\hat{B}M = \frac{B}{2}$.

Seja $A_1 = M\hat{A}B$. Então: $A_1 + 90º + \frac{B}{2} = 180º \Leftrightarrow A_1 = 90º - \frac{B}{2}$

Seja $A_2 = E\hat{A}C$.

Sabemos que:

$$A = A_1 + A_2 \Leftrightarrow A_2 = A - A_1 \Leftrightarrow A_2 = A - 90º + \frac{B}{2} \Leftrightarrow A_2 = A + \frac{B}{2} - 90º .$$

Vamos agora determinar o valor máximo para o ângulo A, em função do ângulo B.

Consideremos o triângulo rectângulo $\triangle[AMB]$. Sabemos que $\overline{AM} = \sin(\frac{B}{2})$.

Por outro lado,

$$X + A_2 = 90º \Leftrightarrow X = 90º - \left(A + \frac{B}{2} - 90º\right) \Leftrightarrow X = 180º - \left(A + \frac{B}{2}\right)$$

Consideremos agora o triângulo $\triangle[EA`A]$ rectângulo em A'. Sabemos que:

$$\overline{A`E} = \sin X = \sin\left(180º - \left(A + \frac{B}{2}\right)\right).$$

Por outro lado, sabemos que $\overline{D``M} = \frac{1}{2}$ e $\overline{AD``} = \overline{A`E}$.

Podemos assim, escrever as seguintes igualdades equivalentes:

$$\overline{AM} = \overline{AD"} + \overline{D"M} \Leftrightarrow \sin(\frac{B}{2}) = \overline{A`E} + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin(\frac{B}{2}) - \sin\left(180º - \left(A + \frac{B}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(180º - \left(A + \frac{B}{2}\right)\right) = \sin\left(\frac{B}{2}\right) - \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 180º - \left(A + \frac{B}{2}\right) = \arcsin\left(\sin\left(\frac{B}{2}\right) - \frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow A = 180º - \frac{B}{2} - \arcsin\left(\sin\left(\frac{B}{2}\right) - \frac{1}{2}\right).$$

Este valor encontrado é o valor máximo para o ângulo A, em função de B pois foi encontrado a partir da situação para a qual o ângulo A é máximo. Assim, podemos escrever:

$$A \leq 180º - \frac{B}{2} - \arcsin\left(\sin\left(\frac{B}{2}\right) - \frac{1}{2}\right).$$

$$iii)\ 180º - B + 2\arcsin\left(\frac{1}{4\sin(\frac{1}{2}B)}\right) \leq A.$$

Já vimos que o valor mínimo para o ângulo A ocorre na situação em que $B = E$ e $C = D$. Partindo desta situação, vamos determinar o valor mínimo de A em função do ângulo B. Na figura 10 está representada a situação para a qual o ângulo A é mínimo.

Consideremos o pentágono convexo e equilátero $[ABCDE]$, nas condições anteriores. Consideremos ainda o eixo de simetria do pentágono que passa pelo vértice A e sejam M e

M' os pontos de intersecção do eixo de simetria com a diagonal $[EB]$ e o lado $[CD]$, respectivamente.

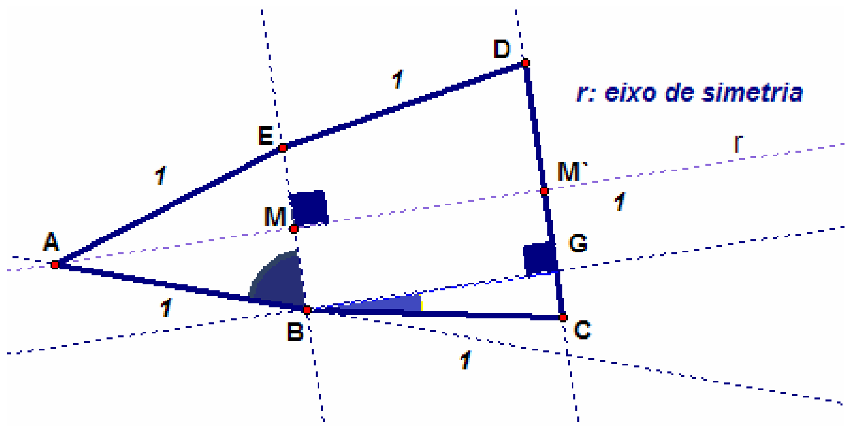


Figura 10

O valor do ângulo A é mínimo, $C=D$ e $E=B$;

$A\hat{B}M = 90^{\circ} - \frac{A}{2}$; $G\hat{B}C = B + \frac{A}{2} - 180^{\circ}$

Vejamos alguns resultados preliminares.

O triângulo $\triangle[AMB]$ é rectângulo em M e sabemos que $M\hat{A}B = \frac{A}{2}$. Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180º, então para este triângulo temos a seguinte igualdade: $M\hat{B}A + 90^{\circ} + \frac{A}{2} = 180^{\circ} \Leftrightarrow M\hat{B}A = 90^{\circ} - \frac{A}{2}$.

Tracemos a recta BG, perpendicular ao lado $[CD]$ e que passa pelo vértice B.

Vamos demonstrar que $M\hat{B}G = 90^{\circ}$.

A reflexão de eixo r, envia o vértice E no vértice B, assim como envia o vértice D no vértice C. Logo as rectas, EB e DC são perpendiculares ao eixo r e por conseguinte, são paralelas entre si.

Por outro lado, a recta BG é perpendicular à recta DC, por construção. Podemos então concluir que a recta BG é perpendicular à recta EB, donde: $M\hat{B}G = 90^{\circ}$.

Podemos então escrever as seguintes igualdades equivalentes:

$$B = A\hat{B}M + 90º + G\hat{B}C \Leftrightarrow B = 90º - \frac{A}{2} + 90º + G\hat{B}C \Leftrightarrow G\hat{B}C = B + \frac{A}{2} - 180º .$$

Com base nestes resultados preliminares, vamos demonstrar o pretendido.

O menor valor para A corresponde ao $\overline{M`C} = \frac{1}{2}$, porque o eixo r é eixo de simetria.

Vamos traduzir esta igualdade com base nos ângulos A e B.

Considerando o triângulo $\triangle[AMB]$, rectângulo em M, podemos escrever que $\sin\left(\frac{A}{2}\right) = \overline{MB}$.

Por outro lado, tendo por base o triângulo $\triangle[BGC]$, rectângulo em G, podemos escrever que:

$$\sin\left(B + \frac{A}{2} - 180º\right) = \overline{GC} .$$

Então temos sucessivamente,

$$\overline{M`C} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \overline{M`G} + \overline{GC} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \overline{MB} + \overline{GC} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\left(\frac{A}{2}\right) + \sin\left(B + \frac{A}{2} - 180º\right) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\left(\frac{\frac{A}{2} + B + \frac{A}{2} - 180º}{2}\right).\cos\left(\frac{\frac{A}{2} - \left(B + \frac{A}{2} - 180º\right)}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2} - 90º\right).\cos\left(90º - \frac{B}{2}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2} - 90º\right). = \frac{1}{4\sin\left(\frac{B}{2}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{A}{2} + \frac{B}{2} - 90º = \arcsin\left(\frac{1}{4\sin\left(\frac{B}{2}\right)}\right) \Leftrightarrow A = 180º - B + 2\arcsin\left(\frac{1}{4\sin\left(\frac{B}{2}\right)}\right).$$

Este valor encontrado é o valor mínimo para A, em função de B pois foi encontrado a partir da situação para a qual ele é mínimo. Assim podemos escrever:

$$180^{\circ}-B+2\sin^{-1}\left(\frac{1}{4\sin\left(\frac{B}{2}\right)}\right)\leq A$$

Temos assim que:

$$180^{\circ}-B+2\arcsin\left(\frac{1}{4\sin\left(\frac{B}{2}\right)}\right)\leq A\leq 180^{\circ}-\frac{B}{2}-\arcsin\left(\sin\left(\frac{B}{2}\right)-\frac{1}{2}\right)$$

Utilizando a nomenclatura e as designações da proposição 2, veremos na proposição seguinte que os restantes ângulos (C; D e E) de um pentágono convexo e equilátero são univocamente determinados pelo conhecimento dos ângulos A e B.

Proposição 3:

$$iv)\ D=\arccos(\cos A+\cos B-\cos(A+B)-\frac{1}{2});$$

$$v)\ C=270^{\circ}-B-\frac{1}{2}D+\theta;$$

$$vi)\ E=270^{\circ}-A-\frac{1}{2}D-\theta; \qquad \text{onde, } \theta=arc\tan\left(\frac{\sin A-\sin B}{1-\cos A-\cos B}\right)$$

Demonstração:

$$iv)\ D=\arccos(\cos A+\cos B-\cos(A+B)-\frac{1}{2}).$$

Consideremos o pentágono convexo e equilátero $[ABCDE]$. Para determinarmos a amplitude do ângulo D em função de A e B, vamos determinar o comprimento da diagonal $[CE]$ de duas formas diferentes e de seguida escrever o ângulo D em função de A e de B.

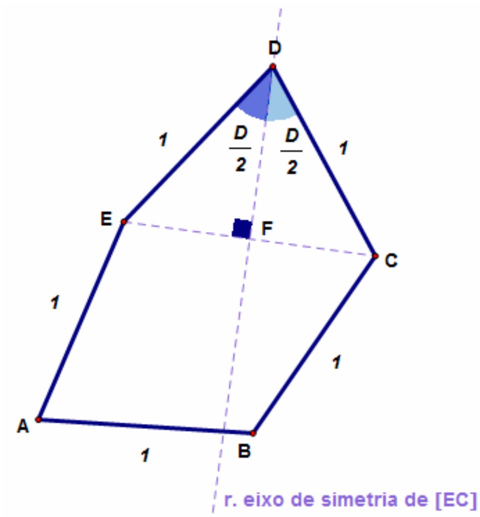


Figura 11 a

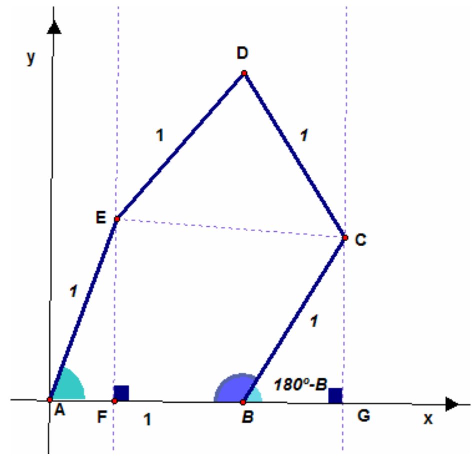


Figura 11 b

Consideremos a figura 11a. Observemos a diagonal $[CE]$ e o seu eixo de simetria r. Como $\overline{DC} = \overline{DE}$, resulta que o eixo r passa pelo vértice do ângulo D e divide – o em dois ângulos iguais. Seja F o ponto de intersecção do eixo r com a diagonal $[CE]$.

Com base no triângulo $\triangle[EFD]$, rectângulo em F, podemos escrever que:

$\sin\left(\frac{D}{2}\right) = \overline{EF}$. Assim, como $\overline{EC} = 2\overline{EF}$, então $\overline{EC} = 2\sin\left(\frac{D}{2}\right)$.

Podemos então escrever a seguinte igualdade:

$$\overline{EC}^2 = \left(2\sin\left(\frac{D}{2}\right)\right)^2 \qquad \textbf{(1)}$$

Consideremos agora a figura 11b.

O pentágono está representado num referencial cartesiano estando o lado $[AB]$ contido no semi-eixo positivo Ox e com o vértice A coincidente com a origem do referido referencial.

Vamos escrever as coordenadas dos vértices E e C em função dos ângulos A e B.

Tracemos a recta que passa pelo vértice E e é perpendicular ao lado $[AB]$. Seja F o ponto de intersecção desta recta com o eixo Ox .

Com base no triângulo $\triangle[AFE]$, rectângulo em F, podemos escrever que: $E(\cos A, \sin A)$.

Tracemos agora a recta que passa pelo vértice C e é perpendicular ao lado $[AB]$. Seja G o ponto de intersecção desta recta com o eixo Ox.

Com base no triângulo $\triangle[CGB]$, rectângulo em G, podemos escrever que:

$C(1+x, y)$, sendo $x = \overline{BG}$ e $y = \overline{CG}$;

Neste triângulo rectângulo, podemos estabelecer as seguintes igualdades:

$\sin(180º - B) = y \Leftrightarrow \sin(B) = y$;

$\cos(180º - B) = x \Leftrightarrow -\cos(B) = x$.

Logo, $C(1-\cos B, \sin B)$.

Por definição de distância entre dois pontos, aplicada aos pontos C e E, obtemos as seguintes igualdades:

$$\overline{CE}^2 = (1-\cos B - \cos A)^2 + (\sin B - \sin A)^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{CE}^2 = (1-\cos A - \cos B)^2 + (\sin A - \sin B)^2 \qquad \textbf{(2)}$$

Igualando os segundos membros das igualdades **(1)** e **(2)**, podemos escrever:

$$\left(2\sin\left(\frac{D}{2}\right)\right)^2 = (1-\cos A - \cos B)^2 + (\sin A - \sin B)^2$$

$$\Leftrightarrow 4\sin^2\left(\frac{D}{2}\right) = 1 - 2\cos A + \cos^2 A - 2(1-\cos A)\cos B + \cos^2 B + \sin^2 A - 2\sin A \sin B + \sin^2 B$$

$$\Leftrightarrow 4\sin^2\left(\frac{D}{2}\right) = 3 - 2\cos A - 2\cos B + 2\cos A\cos B - 2\sin A \sin B$$

$$\Leftrightarrow 2\times 2\sin^2\left(\frac{D}{2}\right)=3-2\cos A-2\cos B+2\cos(A+B)$$

$$\Leftrightarrow 2\times(1-\cos D)=3-2\cos A-2\cos B+2\cos(A+B)$$

$$\Leftrightarrow 2-2\cos D=3-2\cos A-2\cos B+2\cos(A+B)$$

$$\Leftrightarrow -2\cos D=1-2\cos A-2\cos B+2\cos(A+B)$$

$$\Leftrightarrow \cos D=\cos A+\cos B-\cos(A+B)-\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow D=\cos^{-1}\left(\cos A+\cos B-\cos(A+B)-\frac{1}{2}\right).$$

$v)\ C=270^{\circ}-B-\dfrac{D}{2}+\theta$

Para demonstrarmos esta igualdade vamos construir vários triângulos rectângulos, tendo como suporte o pentágono convexo e equilátero. De seguida define-se o ângulo θ em função de A e de B e só depois estabelecemos aquela igualdade.

Na figura 12, podemos observar as construções necessárias para esta demonstração.

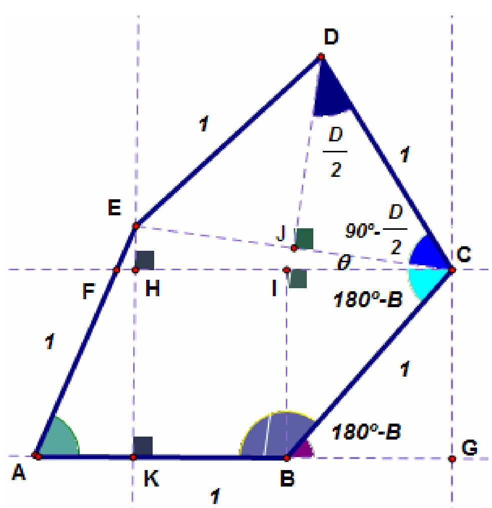


Figura 12

Assim, consideremos a recta AB, suporte do lado $[AB]$ do pentágono. Pelo vértice C traçamos uma recta paralela à recta AB. Esta recta intersecta o lado $[AE]$ no ponto F. Estas rectas são cortadas pela recta BC, nos pontos B e C, respectivamente, vértices do pentágono.

Pelo vértice B traçamos uma recta perpendicular à recta AB. Esta recta intersecta a recta CF no ponto I.

Pelo vértice C traçamos uma recta perpendicular à recta AB. Seja G o ponto de intersecção destas duas rectas.

Assim, os ângulos $\measuredangle ICB$ e $\measuredangle CBG$, têm a mesma amplitude porque são ângulos alternos internos num sistema de duas paralelas cortadas por uma terceira recta.

Assim, $I\hat{C}B = 180º - B$.

Consideremos agora a diagonal $[EC]$. Tracemos a recta perpendicular a esta diagonal que passa pelo vértice D. Seja J o ponto de intersecção entre a diagonal e a recta traçada. O triângulo $\triangle[DJC]$ é rectângulo em J.

A recta DJ é um eixo de simetria do triângulo $\triangle[DEC]$, porque o ponto D é um ponto equidistante dos pontos E e C e pertence a uma recta perpendicular ao segmento de recta $[EC]$. Podemos então concluir que J é o ponto médio do $[EC]$.

Assim, $J\hat{D}C = \frac{D}{2}$.

Por outro lado, com base no triângulo $\triangle[DJC]$, podemos escrever que:

$$\frac{D}{2} + 90º + D\hat{C}J = 180º \Leftrightarrow D\hat{C}J = 90º - \frac{D}{2}.$$

Tracemos agora, pelo vértice E, uma recta perpendicular à recta CF. Como as rectas CF e AB são paralelas, por construção da recta CF, então a recta a traçar será também perpendicular à recta AB. Sejam H e K os pontos de intersecção daquela recta com estas duas rectas, respectivamente.

Consideremos o triângulo $\triangle[EHC]$ rectângulo em H. Seja $\theta = H\hat{C}E$.

Com base neste triângulo podemos escrever a seguinte igualdade:

$\tan\theta = \frac{\overline{EH}}{\overline{HC}}$.

Vamos escrever a amplitude θ em função de A e de B. Para isso vamos traduzir os comprimentos desta igualdade através das razões trigonométricas, envolvendo os referidos ângulos.

Começamos por traduzir o $\overline{EH}$.

Por observação da figura 12, podemos estabelecer as seguintes relações:

$\overline{EH} = \overline{EK} - \overline{HK}$ e $\overline{HK} = \overline{CG}$, logo, $\overline{EH} = \overline{EK} - \overline{CG}$

Consideremos o triângulo $\triangle[AKE]$, rectângulo em K, podemos escrever que $\overline{EK} = \sin A$.

Considerando agora o triângulo $\triangle[BGC]$ rectângulo em G, podemos escrever que:

$\overline{CG} = \sin(180° - B) = \sin B$.

Podemos então concluir que:

$\overline{EH} = \sin A - \sin B$.

Vamos agora traduzir o $\overline{HC}$.

Sabemos que: $\overline{HC} = \overline{KG}$ e $\overline{KG} = \overline{AG} - \overline{AK}$. Logo $\overline{HC} = \overline{AG} - \overline{AK}$.

Por outro lado, recorrendo ao triângulo $\triangle[BGC]$, rectângulo em G, obtemos

$\overline{AG} = \overline{AB} + \overline{BG} = 1 + \cos(180° - B) = 1 - \cos B$.

Considerando o $\triangle[AKE]$, rectângulo em K, obtemos a igualdade $\overline{AK} = \cos A$.

Assim, $\overline{HC} = 1 - \cos A - \cos B$.

Finalmente podemos escrever que:

$$\tan\theta = \frac{\sin A - \sin B}{1 - \cos A - \cos B}, \qquad \textbf{(3)}$$

ou seja, $\theta = \arctan\left(\frac{\sin A - \sin B}{1 - \cos A - \cos B}\right)$

Vamos agora estabelecer a igualdade pretendida.

Observando novamente a figura 12, com base nos triângulos: $\triangle[DJC]$, $\triangle[CIB]$ e $\triangle[BGC]$, podemos escrever finalmente que:

$C = 180º - B + 90º - \frac{D}{2} + \theta = 270º - B - \frac{D}{2} + \theta$, onde θ verifica a igualdade **(3)**.

$$vi) E = 270º - A - \frac{1}{2} D - \theta$$

Falta-nos agora escrever o ângulo E à custa de outros ângulos. Esta igualdade será demonstrada à custa das construções apresentadas na figura 12.

Observando a figura anterior, consideremos o triângulo $\triangle[AKE]$ rectângulo em K. Temos que: $E\hat{A}K + 90º + K\hat{E}A = 180º \Leftrightarrow K\hat{E}A = 90º - A$.

Com base no triângulo $\triangle[EHC]$, rectângulo em H, podemos escrever que:

$$C\hat{E}H + 90º + \theta = 180º \Leftrightarrow C\hat{E}H = 90º - \theta .$$

Com base no triângulo $\triangle[DJE]$ rectângulo em J, temos que:

$$\frac{D}{2} + 90º + D\hat{E}J = 180º \Leftrightarrow D\hat{E}J = 90º - \frac{D}{2} .$$

Assim, $E = A\hat{E}F + F\hat{E}C + C\hat{E}D = 90º - A + 90º - \theta + 90º - \frac{D}{2}$.

Podemos então concluir que $E = (180º - A) + \left(90º - \frac{D}{2}\right) - \theta$, onde θ verifica a igualdade $\tan\theta = \frac{\sin A - \sin B}{1 - \cos A - \cos B}$.

2. REGIÃO ADMISSÍVEL PARA A CONSTRUÇÃO DE UM PENTÁGONO CONVEXO E EQUILÁTERO

Vejamos agora qual o grau de liberdade que temos para construirmos um pentágono convexo e equilátero.

Escolham-se arbitrariamente ângulos consecutivos A e B do pentágono e que satisfaçam as seguintes condições:

$108^\circ \leq B < 180^\circ$

e

$$180^\circ - B + 2\arcsin\left(\frac{1}{4\sin\left(\frac{1}{2}B\right)}\right) \leq A \leq 180^\circ - \frac{B}{2} - \arcsin\left(\sin\left(\frac{B}{2}\right) - \frac{1}{2}\right).$$

Com base na proposição 3, os restantes ângulos do pentágono, C, D e E, ficam determinados univocamente pelos ângulos A e B. Assim, podemos identificar um pentágono convexo equilátero através das coordenadas de um ponto no Plano BA, pertencente à região admissível:

$$\left\{(B,A) : B \in \left[108^\circ, 180^\circ\right[\wedge \varphi(B) \leq A \leq \gamma(B)\right\}, \text{ onde:}$$

$$\varphi(B) = 180^\circ - B + 2\arcsin\left(\frac{1}{4\sin\left(\frac{1}{2}B\right)}\right)$$

$$\gamma(B) = 180^\circ - \frac{B}{2} - \arcsin\left(\sin\left(\frac{B}{2}\right) - \frac{1}{2}\right).$$

A região de admissibilidade correspondente a estas condições, descreve a liberdade que temos na construção de um pentágono convexo e equilátero.

Podemos observar a região admissível, no plano BA, na figura seguinte.

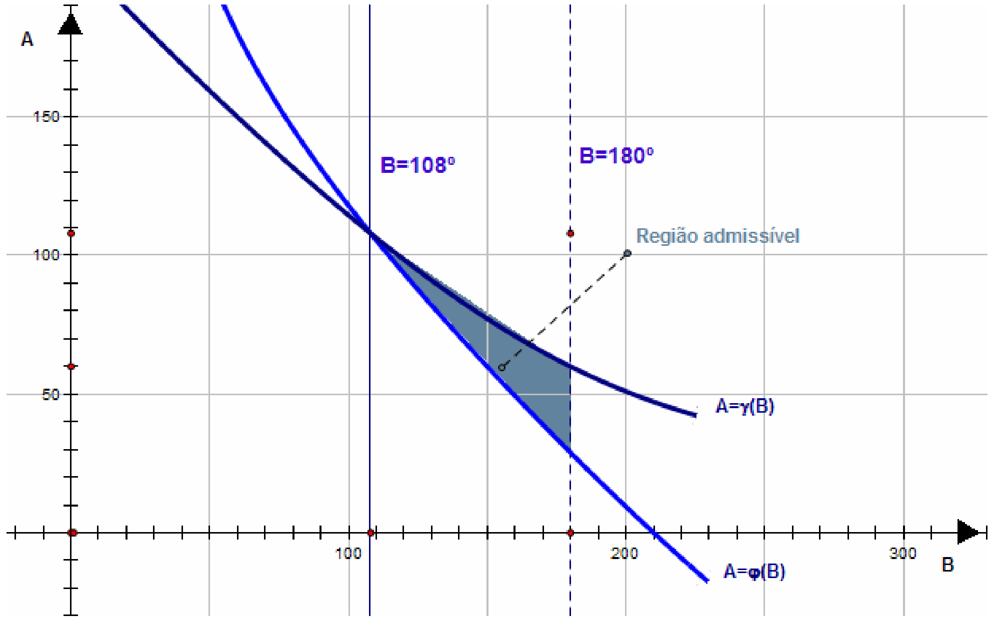


Figura 13

Assim, a cada ponto da região identificada no plano BA, corresponde um e um só pentágono convexo equilátero, a menos de uma isometria.

3. INTERVALO DE VARIAÇÃO DOS ÂNGULOS

Começamos por determinar o valor mínimo para cada um dos ângulos internos de um pentágono convexo e equilátero e estabelecemos os limites de variação do ângulo A. De seguida identificamos os limites de variação para cada um dos restantes ângulos internos de um pentágono convexo equilátero, com os ângulos etiquetados da forma habitual. Finalmente, apresentamos alguns exemplos de polígonos correspondentes a determinados pontos da região de admissibilidade.

Sabemos que $108^\circ \leq B < 180^\circ$.

Vamos determinar o valor mínimo para cada um dos ângulos internos de um pentágono convexo e equilátero.

Sem perda de generalização, consideremos um pentágono convexo de lado unitário.

A situação limite para obtermos o menor ângulo interno num pentágono convexo e equilátero é o pentágono degenerar num triângulo isósceles, conforme mostra a figura:

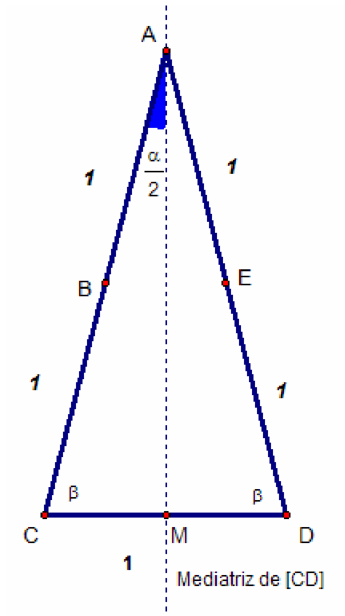


Figura 14

$\overline{AC} = \overline{AD} = 2$ $\overline{CD} = 1$; $\overline{CM} = \frac{1}{2}$

O triângulo com vértices A, D e C é isósceles pois os lados do pentágono: [A E] e [DE] estão alinhados com comprimento total de 2 unidades. O mesmo acontece com os lados [BC] e [AB]. Assim os lados [AC] e [AD] do triângulo $\triangle$[ACD] são iguais. O terceiro lado do triângulo mede 1 unidade pois é o lado [CD] do pentágono.

Seja M o ponto médio do lado [CD] e consideremos a recta MA, mediatriz do lado [CD].

Aplicando Teorema de Pitágoras ao triângulo $\triangle[CMA]$ rectângulo em M, determinamos o $\overline{MA}$.

$\overline{MA} = \sqrt{4 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{15}}{2}$ e neste triângulo, obtemos as seguintes igualdades: $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4}$ e $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{15}}{4}$.

Sabemos que: $\cos\alpha = \cos^2(\frac{\alpha}{2}) - \sin^2(\frac{\alpha}{2}) = \frac{15}{16} - \frac{1}{16} = \frac{14}{16} = \frac{7}{8}$.

Como α é um ângulo agudo então: $\alpha = arc\cos(\frac{7}{8})$.

Podemos afirmar que, se qualquer um dos ângulos internos do pentágono for menor ou igual a $arc\cos(\frac{7}{8})$, então deixamos de ter um pentágono convexo.

Assim temos que:

$$\text{A, B, C, D, E} > arc\cos(\frac{7}{8})$$

Mas $arc\cos(\frac{7}{8}) \simeq 28{,}96^{\circ}$, logo $\text{A, B, C, D, E} > arc\cos(\frac{7}{8}) > 28^{\circ}$.

Por outro lado, para que A possa ter amplitude máxima, deve o ângulo B ter amplitude mínima e igual a 108º. Como B é o maior dos ângulos, então podemos escrever que $arc\cos(\frac{7}{8}) < A \leq 108^{\circ}$.

Para determinar o intervalo de variação da amplitude do ângulo C temos de ter em consideração o seguinte:

O menor valor para C é obtido quando o ângulo A é máximo e igual a C, pois sabemos que o ângulo A não é superior ao ângulo C. Neste caso, acontecem as seguintes igualdades: $A = C$ e $D = E$. Mas C é tanto menor quanto maior for B e a máxima variação para B é atingir o valor 180º. Então o pentágono degenera num trapézio isósceles. Estas conclusões estão representadas na figura 15.

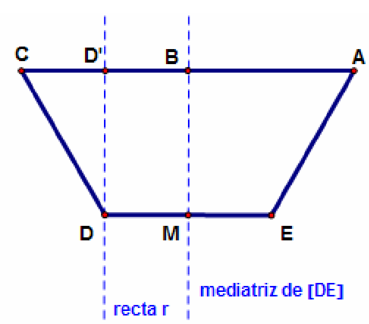


Figura 15

Consideremos a mediatriz do lado $[DE]$. Esta mediatriz é eixo de simetria do trapézio. Tracemos uma recta, r, paralela à mediatriz e passando pelo vértice D. Seja D' o ponto de intersecção da recta r com o lado $[CA]$. Podemos afirmar que: $\overline{DM} = \overline{D'B} = \overline{D'C} = \frac{1}{2}$.

Considerando o triângulo $\triangle[DD'C]$ rectângulo em D', podemos escrever que, $\cos C = \frac{1}{2}$. Com C é um ângulo agudo, então, $C = arc\cos(\frac{1}{2}) = 60º$. Este é o menor valor para o ângulo C.

Às igualdades $B = 180º$, $C = A = 60º$ e $D = E$, corresponde um pentágono degenerado num trapézio equilátero.

Por outro lado, para que C possa ter amplitude máxima, deve o ângulo B ter amplitude mínima e igual a 108º. Como B é o maior dos ângulos, então podemos escrever que $60º < C \leq 108º$.

Para determinar os limites de variação do ângulo D, devemos ter em consideração que o menor valor de D é determinado pela conjunção das seguintes condições: o ângulo A ser mínimo ($A = arc\cos(\frac{7}{8})$), o que implica, $B = E$ e $C = D$ e o ângulo B ser máximo. Assim, no caso extremo (degenerado) teremos: $B = E = 180º$.

Com base nas condições enunciadas, temos a seguinte figura.

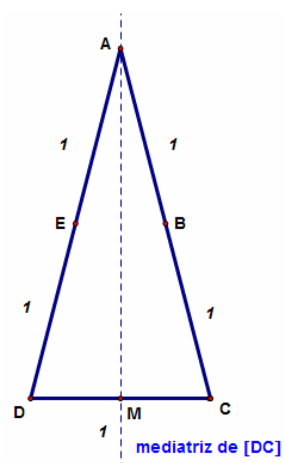


Figura 16

$A = arc\cos(\frac{7}{8})$; $B = E = 180º$; $C = D$

Considerando o triângulo $\triangle[DMA]$ rectângulo em M. Podemos escrever o seguinte:

$\cos D = \frac{\frac{1}{2}}{2} \Leftrightarrow \cos D = \frac{1}{4}$. Como D é um ângulo agudo, então $D = arc\cos(\frac{1}{4})$.

Assim, $D > arc\cos(\frac{1}{4})$.

O valor máximo para D é determinado pela conjunção das seguintes condições: o ângulo B ser máximo ($B = 180º$) e a amplitude do ângulo A ser máxima ($A = C$). Estas condições implicam a igualdade $D = E$.

Observemos a figura seguinte:

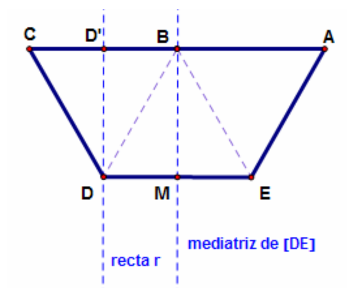


Figura 17

O triângulo $\triangle[CDB]$ é isósceles, porque $\overline{CB} = \overline{CD}$ e sabemos que para aquele valor máximo de B corresponde um valor mínimo de 60º para o ângulo C. Logo $D\hat{B}C = C\hat{D}B = 60º$. Por outro lado, o triângulo $\triangle[ABE]$ é também isósceles e geometricamente igual ao triângulo $\triangle[CDB]$, logo $E\hat{B}A = 60º$. Podemos então escrever que $D\hat{B}E = 180º - 60º - 60º = 60º$. Também o triângulo $\triangle[DEB]$ é isósceles, logo $B\hat{D}E = 60º$. Daqui resulta que $E\hat{D}C = 60º + 60º = 120º$. Este é o valor máximo para o ângulo D.

Temos então os limites de variação da amplitude do ângulo D: $arc\cos(\frac{1}{4}) < D < 120º$.

Finalmente, vamos agora determinar os limites de variação do ângulo E. Comecemos por identificar o seu valor mínimo. Partindo do valor mínimo para A, quanto maior for o seu valor, menor é o valor para E, o que corresponde ao ângulo B se aproximar do seu valor mínimo de 108º. Quando o ângulo A atinge o seu valor máximo, implica as igualdades: $A = C$ e $D = E$. O valor máximo já estabelecido para C é 108º, pelo que vamos ter as igualdades: $A = B = C = 108º$. Como os ângulos D e E são iguais e sabemos que a soma dos ângulos internos de um pentágono convexo e equilátero é igual a 540º, resulta que $D = E = 108º$. Este é o valor mínimo para o ângulo E.

Como $E \leq B < 180º$, então $E < 180º$.

Podemos então escrever que: $108º \leq E < 180º$.

Resumindo, podemos afirmar que se num pentágono convexo e equilátero $[ABCDE]$ e se os seus ângulos internos forem etiquetados daquela forma descrita, então temos as seguintes condições:

$A \leq C \leq D \leq E \leq B$, com:

$\arccos(\frac{7}{8}) < A \leq 108º$

$108º \leq B < 180º$

$60º < C \leq 108º$

$arc\cos(\frac{1}{4}) < D < 120º$

$108º \leq E < 180º$.

Após estabelecermos os limites de variação dos ângulos internos do pentágono convexo e equilátero, podemos observar, na figura 18, alguns pontos, nomeadamente os pontos, R, Q, H e T assim como o segmento de recta $[QT]$ que correspondem a figuras geométricas especiais.

Partindo das coordenadas destes pontos e considerando as igualdades da proposição 3, podemos determinar as outras amplitudes dos restantes ângulos internos do pentágono.

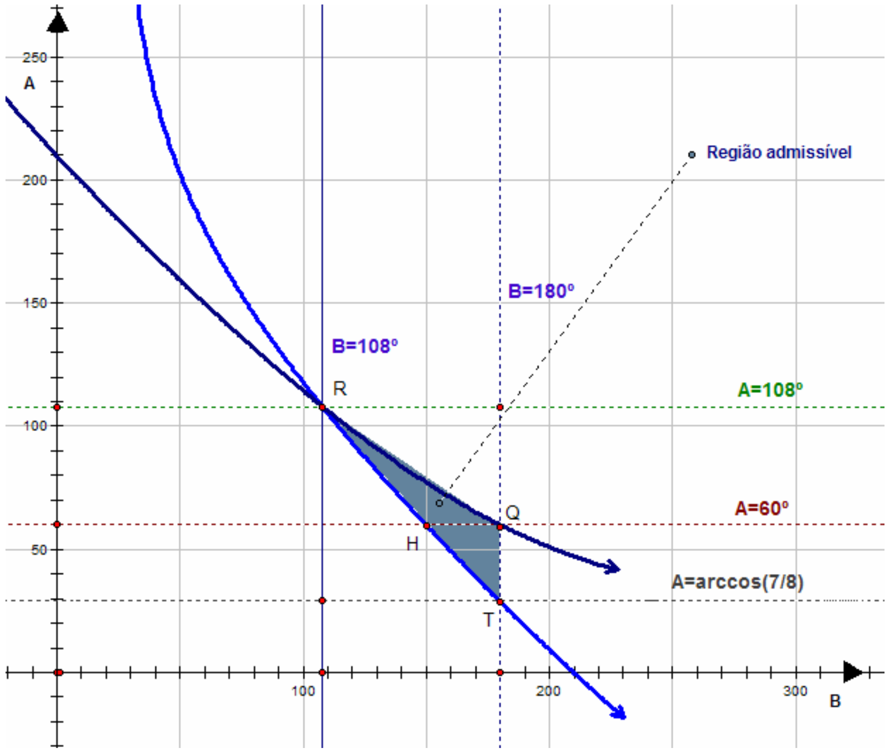


Figura 18

Ao ponto R ($A = B = 108º$) correspondem as seguintes amplitudes para os restantes ângulos do pentágono: $C = D = E = 108º$. Obtemos um pentágono convexo e equilátero regular.

O ponto H ($A = 60º$, $B = E = 150º$ e $C = D = 90º$) corresponde a um pentágono "casa".

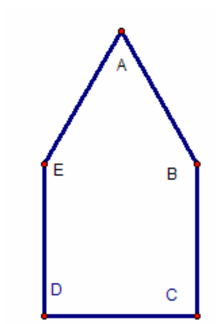


Figura 19

Pentágono "casa"

O ponto T ($A = \arccos(\frac{7}{8})$, $B = E = 180º$ e $C = D = \arccos\left(\frac{1}{4}\right)$) corresponde a um triângulo isósceles.

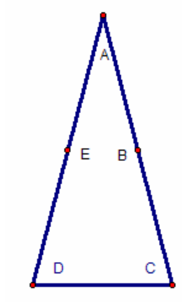


Figura 20

Triângulo isósceles

O ponto Q ($A = C = 60º$, $B = 180º$ e $D = E = 120º$) corresponde a um trapézio.

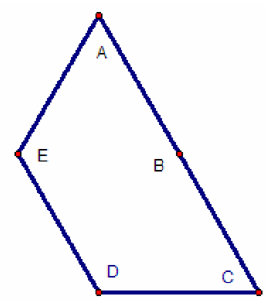


Figura 21

Trapézio

Relativamente aos pontos do segmento de recta $[QT]$, corresponde a cada um, um quadrilátero, uma vez que o ângulo B é máximo e igual a 180º.

PARTE II

PENTÁGONOS QUE PAVIMENTAM O PLANO

A identificação dos pentágonos convexos e equiláteros que pavimentam o plano, inicia-se com a definição para que um pentágono convexo e equilátero pavimente o plano, com base nos seus ângulos internos. São estabelecidas as consequências e apresentado um método para a determinação das condições suficientes para que um pentágono convexo e equilátero pavimente o plano. Com base neste método, são eliminadas as condições que são verificadas por pentágonos que não pavimentam o plano, restando um conjunto de condições. Dentro deste conjunto, são estabelecidas e demonstradas relações de equivalência entre condições.

Com base nas condições que restaram, são identificados alguns tipos de pentágonos convexos e equiláteros que pavimentam o plano. Esta identificação foi baseada na equivalência de condições envolvendo os ângulos do pentágono. Na parte final, são apresentados apenas três conjuntos de condições, sendo dois deles eliminados por incompatibilidade de condições. Desta forma, são reveladas as condições que definem os pentágonos convexos e equiláteros que pavimentam o plano. Para cada um destes tipos de pentágonos, são apresentados exemplos e demonstrado o facto de que um protótipo, pode pavimentar o plano de diversas formas.

Definição 1: Seja P um pentágono convexo e equilátero com ângulos internos nomeados da forma já descrita. A pavimentação do plano por pentágonos convexos e equiláteros ocorre se para cada vértice do pentágono se verificar a seguinte relação:

$m_A A + m_B B + m_C C + m_D D + m_E E = 360^\circ$, onde, m_A, m_B, m_C, m_D e m_E, representam o número de ângulos A, B, C, D e E, respectivamente, que circundam cada vértice do pentágono.

Nota 1: Os coeficientes m_A, m_B, m_C, m_D e m_E,, são números inteiros não negativos.

Vamos representar as soluções daquela equação pelo 5 – uplo (m_A, …, m_E).

Proposição 4: $3 \leq m_A + m_B + m_C + m_D + m_E \leq 12$.

Demonstração:

Sabemos que: $arc\cos(\frac{7}{8}) \leq$ A, B, C, D, E .

Mas $arc\cos(\frac{7}{8}) \cong 28{,}96^{o}$, logo $28^{o} < arc\cos(\frac{7}{8}) \leq$ A, B, C, D, E.

Na igualdade: $m_A A + m_B B + m_C C + m_D D + m_E E = 360^{o}$, supondo que cada ângulo seria no mínimo de 28º, viria:

$$m_A 28^{o} + m_B 28^{o} + m_C 28^{o} + m_D 28^{o} + m_E 28^{o} = 360^{o}$$

$$\Leftrightarrow 28^{o}(m_A + m_B + m_C + m_D + m_E) = 360^{o}$$

$$\Leftrightarrow m_A + m_B + m_C + m_D + m_E = \frac{360^{o}}{28^{o}}$$

$$\Leftrightarrow m_A + m_B + m_C + m_D + m_E = 12$$

Como há a possibilidade de cada um dos ângulos ser maior do que 28º, então para que a igualdade $m_A A + m_B B + m_C C + m_D D + m_E E = 360^{o}$ seja válida teremos:

$$m_A + m_B + m_C + m_D + m_E \leq 12$$

Como cada um dos ângulos A, B, C, D, E é menor do que 180º, então da igualdade $m_A A + m_B B + m_C C + m_D D + m_E E = 360^{o}$, supondo que no máximo cada ângulo mede 180º, viria:

$$m_A 180^{o} + m_B 180^{o} + m_C 180^{o} + m_D 180^{o} + m_E 180^{o} = 360^{o}$$

$$\Leftrightarrow 180^{o}(m_A + m_B + m_C + m_D + m_E) = 360^{o}$$

$$\Leftrightarrow m_A + m_B + m_C + m_D + m_E = \frac{360^{o}}{180^{o}}$$

$$\Leftrightarrow m_A + m_B + m_C + m_D + m_E = 2.$$

Uma vez que cada ângulo é inferior a 180º, então $m_A + m_B + m_C + m_D + m_E \geq 2$. Mas, considerando os intervalos de variação dos ângulos do pentágono, a igualdade

$m_A + m_B + m_C + m_D + m_E = 2$ é impossível, pelo que $m_A + m_B + m_C + m_D + m_E \geq 3$. Fica assim demonstrada a proposição.

Vamos agora iniciar o processo para a determinação das condições suficientes para que um pentágono convexo e equilátero pavimente o plano.

Com base nos limites de variação dos ângulos A, B, C, D e E definidos anteriormente, a equação $m_A A + m_B B + m_C C + m_D D + m_E E = 360º$, com $(m_A, ..., m_E) \in \mathbb{Z}_0^5$, possui 220 soluções.

No sentido de se eliminarem as soluções que não são verificadas por algum pentágono convexo e equilátero, correspondente à região admissível $\mathcal{P}$, vamos estabelecer um conjunto de funções, definidas por cada solução da equação anterior, e uma relação de ordem neste conjunto.

Para cada, solução da equação $m_A A + m_B B + m_C C + m_D D + m_E E = 360º$, consideramos a função definida na região admissível $\mathcal{P}$, definida da seguinte forma:

$$f_{m_A m_B m_C m_D m_E} : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\mathrm{B, A}) \rightarrow m_A A + m_B B + m_C C + m_D D + m_E E.$$

Vamos utilizar a seguinte notação:

$$f_{m_A m_B m_C m_D m_E}((\mathrm{B, A})) = m_A A + m_B B + m_C C + m_D D + m_E E = m_A m_B m_C m_D m_E.$$

De seguida vamos estabelecer uma relação de ordem parcial, no conjunto das funções definidas atrás, da seguinte forma:

Sejam A, B, C, D e E, ângulos de um pentágono convexo equilátero, etiquetados da forma descrita, com $A \leq C \leq D \leq E \leq B$, satisfazendo as condições:

$$arc\cos(\frac{7}{8}) < A \leq 108º$$

$$108º \leq B < 180º$$

$$60º < C \leq 108º$$

$$arc\cos(\frac{1}{4}) < D < 120º$$

$108º \leq E < 180º$.

Por definição, escrevemos:

$m_A m_B m_C m_D m_E < m`_A m`_B m`_C m`_D m`_E$, se:

$m_A A + m_B B + m_C C + m_D D + m_E E \leq m`_A A + m`_B B + m`_C C + m`_D D + m`_E E$,

Observemos que:

Se: $m_A m_B m_C m_D m_E < m`_A m`_B m`_C m`_D m`_E$ e

$m`_A A + m`_B B + m`_C C + m`_D D + m`_E E < 360º$,

então,

$m_A A + m_B B + m_C C + m_D D + m_E E < 360º$. A partir daqui podemos eliminar

$m_A m_B m_C m_D m_E$.

Analogamente,

Se $m_A m_B m_C m_D m_E > m`_A m`_B m`_C m`_D m`_E$ e

$m`_A A + m`_B B + m`_C C + m`_D D + m`_E E > 360º$,

então, podemos eliminar $m_A m_B m_C m_D m_E$.

A proposição seguinte estabelece as condições que são verificadas pelos pentágonos convexos e equiláteros correspondentes a cada ponto da região admissível, respectivamente.

Proposição 5: Se (B, A) pertence à região admissível, então:

(I) $B + C + D < 360º$

(II) $2D + E < 360º$

(III) $2A + 2E > 360º$

(IV) $A + B + 2C > 360º$

(V) $A + C + D + E > 360º$

(VI) $2A + 2C + E > 360º$

(VII) $4C + D > 360º$

(VIII) $4A + C + E > 360º$

(IX) $2A + 4C > 360º$

(X) $7A + E > 360º$

(XI) $5A + 3C > 360º$

(XII) $8A + 2C > 360º$

(XIII) $10A + C > 360º$

A demonstração desta proposição foi baseada na representação gráfica da região admissível e das funções implícitas nas variáveis A e B, correspondentes às relações anteriores (ver figura 22).

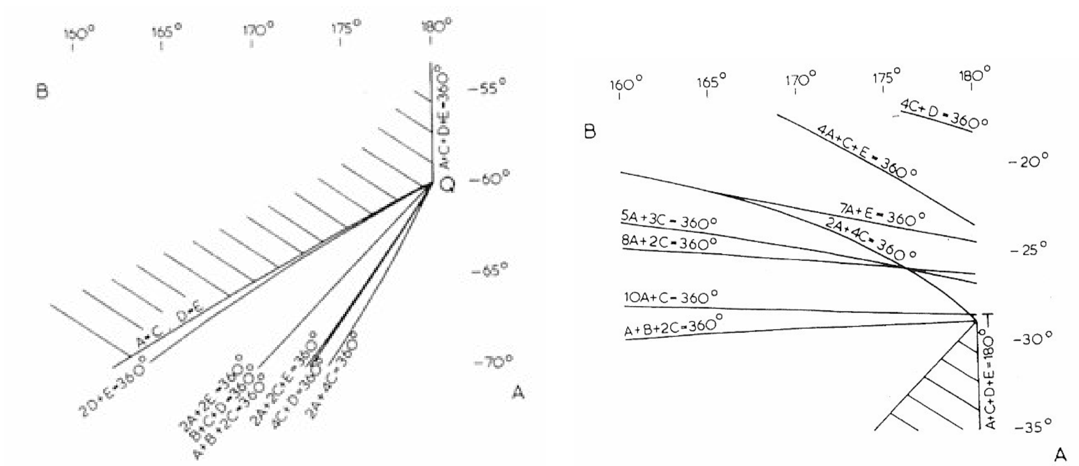


Figura 22

Certas relações angulares, não são verificadas por nenhum pentágono convexo e equilátero.

Com base nas condições da proposição 5, foram eliminadas relações entre os ângulos A, B, C, D e E, usando a relação de ordem parcial definida. Desta forma eliminaram-se possíveis candidatos a soluções da equação:

$$m_A A + m_B B + m_C C + m_D D + m_E E = 360º .$$

Seja $(m_A, ..., m_E) \in \mathbb{Z}_0^5$ uma solução da equação anterior que notamos por $m_A m_B m_C m_D m_E$.

De seguida apresentamos uma lista de “soluções” eliminadas pelas relações constantes na proposição 5:

Condições da proposição 5	<0 1110	<00021	>20002	>11200	>10111	>20201	>00410	>40101
Condições eliminadas	00111	00030	22000	01030	00031	00230	00320	31020
	11010		21001	01120	02116	11120	01400	30021
	10101		32000	02200	01111	10121	00401	31110
	01200		31001	01201	00112	11210		30111
	10011		30002	00202	00121	10211		31200
	20100			01210	00211	11300		30201
	00201			01300	12001	10301		42000
	11100			13000	10003	22010		41001
				11002	12010	21011		40002
				11020	11011	20012		41010
				12100	10012	21020		40011
					10021	20021		41100
					11101	22100		41110
					10102	21101		40111
					11110	20102		41200
						21110		40201
						20111		51010
						21200		50011
								51100
								50101

Condições da proposição 5	>20400	>70001	>50300
Condições eliminadas	00600	61010	50120
	10320	60011	50210
	10410	61100	60300
	10500	60101	
	20040	71000	
	20130	81000	
	20220	80001	
	21300		
	20301		
	20310		
	20500		
	30220		
	30310		
	30400		
	40400		

Vamos realizar apenas a demonstração de uma das condições anteriores. As restantes realizam-se de forma análoga. Vejamos então um exemplo.

Se $B+C+D<360º$, então $C+D+E<360º$.

Consideremos a região de admissibilidade e os ângulos nas seguintes condições: $A \le C \le D \le E \le B$.

Uma vez que $E \le B$, e considerando a hipótese, $B+C+D<360º$, podemos escrever as seguintes condições:

$C+D+E \le C+D+B < 360º$, logo, $C+D+E<360º$.

Ficou demonstrado que a solução (0,0,1,1,1) não interessa para o problema da determinação de pentágonos convexos que pavimentem o plano.

Utilizando este método foram eliminadas várias "soluções", restando 100 relações que constituem a seguinte proposição.

Proposição 6: Dado um pentágono convexo e equilátero correspondente a um ponto (B,A) da região de admissibilidade, os respectivos ângulos satisfazem pelo menos uma das 100 relações, a saber:

1. $A+2E=360^\circ$	36. $C+3D=360^\circ$	70. $3A+C+2D=360^\circ$
2. $A+B+E=360^\circ$	37. $4D=360^\circ$	71. $3A+3D=360^\circ$
3. $A+2B=360^\circ$	38. $5A=360^\circ$	72. $7A=360^\circ$
4. $C+2E=360^\circ$	39. $4A+C=360^\circ$	73. $6A+C=360^\circ$
5. $B+C+E=360^\circ$	40. $4A+D=360^\circ$	74. $6A+D=360^\circ$
6. $2B+C=360^\circ$	41. $4A+E=360^\circ$	75. $6A+E=360^\circ$
7. $B+2D=360^\circ$	42. $4A+B=360^\circ$	76. $6A+B=360^\circ$
8. $D+2E=360^\circ$	43. $3A+2C=360^\circ$	77. $5A+2C=360^\circ$
9. $B+D+E=360^\circ$	44. $3A+C+D=360^\circ$	78. $5A+C+D=360^\circ$
10. $2B+D=360^\circ$	45. $3A+C+E=360^\circ$	79. $5A+2D=360^\circ$
11. $3E=360^\circ$	46. $3A+B+C=360^\circ$	80. $4A+3C=360^\circ$
12. $B+2E=360^\circ$	47. $3A+2D=360^\circ$	81. $4A+2C+D=360^\circ$
13. $2B+E=360^\circ$	48. $3A+D+E=360^\circ$	82. $4A+C+2D=360^\circ$
14. $3B=360^\circ$	49. $3A+B+D=360^\circ$	83. $4A+3D=360^\circ$
15. $4A=360^\circ$	50. $2A+3C=360^\circ$	84. $8A=360^\circ$
16. $3A+C=360^\circ$	51. $2A+2C+D=360^\circ$	85. $7A+C=360^\circ$
17. $3A+D=360^\circ$	52. $2A+C+2D=360^\circ$	86. $7A+D=360^\circ$
18. $3A+E=360^\circ$	53. $2A+3D=360^\circ$	87. $6A+2C=360^\circ$
19. $3A+B=360^\circ$	54. $A+4C=360^\circ$	88. $6A+C+D=360^\circ$
20. $2A+2C=360^\circ$	55. $A+3C+D=360^\circ$	89. $6A+2D=360^\circ$
21. $2A+C+D=360^\circ$	56. $A+2C+2D=360^\circ$	90. $9A=360^\circ$
22. $2A+C+E=360^\circ$	57. $A+C+3D=360^\circ$	91. $8A+C=360^\circ$
23. $2A+B+C=360^\circ$	58. $A+4D=360^\circ$	92. $8A+D=360^\circ$
24. $2A+2D=360^\circ$	59. $5C=360^\circ$	93. $7A+2C=360^\circ$
25. $2A+D+E=360^\circ$	60. $6A=360^\circ$	94. $7A+C+D=360^\circ$
26. $2A+B+D=360^\circ$	61. $5A+C=360^\circ$	95. $7A+2D=360^\circ$
27. $A+3C=360^\circ$	62. $5A+D=360^\circ$	96. $10A=360^\circ$
28. $A+2C+D=360^\circ$	63. $5A+E=360^\circ$	97. $9A+C=360^\circ$
29. $A+2C+E=360^\circ$	64. $5A+B=360^\circ$	98. $9A+D=360^\circ$
30. $A+C+2D=360^\circ$	65. $4A+2C=360^\circ$	99. $11A=360^\circ$
31. $A+3D=360^\circ$	66. $4A+C+D=360^\circ$	100. $12A=360^\circ$
32. $4C=360^\circ$	67. $4A+2D=360^\circ$	
33. $3C+D=360^\circ$	68. $3A+3C=360^\circ$	
34. $3C+E=360^\circ$	69. $3A+2C+D=360^\circ$	
35. $2C+2D=360^\circ$		

Algumas das relações anteriores são equivalentes. Vamos estabelecer essas equivalências e demonstrá-las.

Proposição 7: As relações seguintes são equivalentes:

(A) 2. $A+B+E=360º$

(B) 23. $2A+B+C=360º$

(C) 25. $2A+D+E=360º$

(D) 35. $2C+2D=360º$

(E) 44. $3A+C+D=360º$

(F) 60. $6A=360º$

Demonstração:

A demonstração é feita através da seguinte sequência: (F)$\Leftrightarrow$(D); $(F)\Leftrightarrow(E)$; $(D)\Leftrightarrow(E)$; $(D)\Leftrightarrow(A)$; $(F)\Rightarrow(B)$; $(F)\Rightarrow(C)$; $(B)\Rightarrow(F)$ e $(C)\Rightarrow(F)$.

Vamos começar por demonstrar a equivalência (F)$\Leftrightarrow$(D).

Começamos por demonstrar que $(F)\Rightarrow(D)$.

Consideremos um pentágono convexo e equilátero $[ABCDE]$.

Suponhamos por hipótese que $A=60º$. Com base na figura 23, podemos observar que o triângulo $\triangle[ABE]$ tem dois lados iguais. Assim, os seus ângulos internos opostos aos lados iguais são também iguais. Concluímos então, que este triângulo tem os três ângulos internos com amplitudes iguais a 60º. Logo os seus três lados são todos iguais. O quadrilátero $[BCDE]$ é um losango. Como a soma de dois ângulos internos adjacentes, no losango, é igual a 180º, então em particular $C+D=180º$.

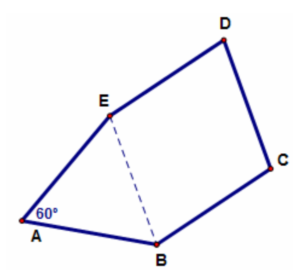


Figura 23

Antes de demonstrar a implicação contrária, vamos ver o seguinte: partindo da amplitude de 60º para o ângulo A, se aumentarmos essa amplitude, para mantermos o pentágono equilátero, então os ângulos C e D aumentam, pelo que $C + D > 180º$.

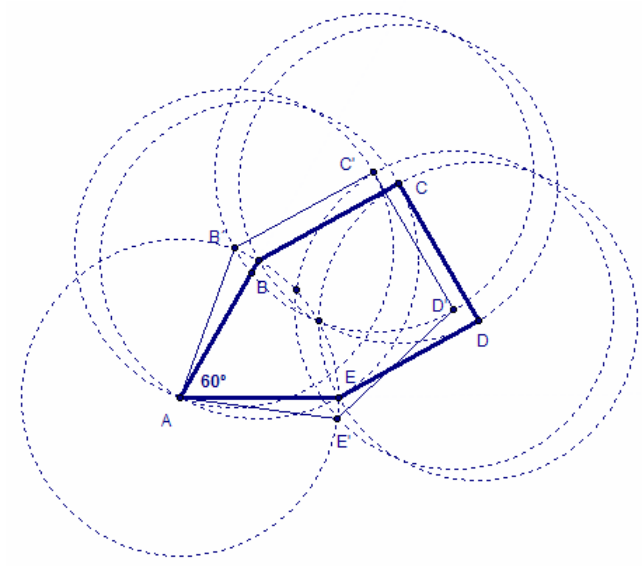


Figura 24

O aumento do ângulo A implica o aumento dos ângulos C e D

Se diminuirmos a amplitude do ângulo A, para mantermos o pentágono equilátero, então os ângulos C e D diminuem, pelo que $C + D < 180º$.

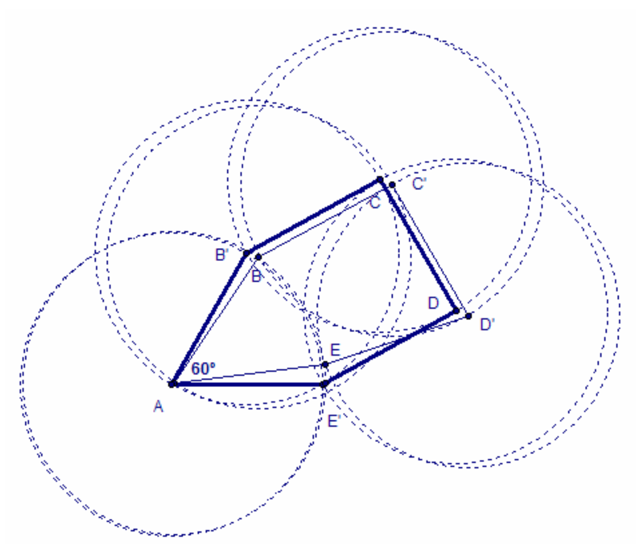


Figura 25

A diminuição do ângulo A implica a diminuição dos ângulos C e D

Resumindo podemos escrever que:

$A > 60º \Rightarrow C + D > 180º$ e que $A < 60º \Rightarrow C + D < 180º$.

Vamos agora demonstrar que $(D) \Rightarrow (F)$.

Suponhamos por redução ao absurdo que $A \neq 60º$, então, ou $A > 60º$ o que teria como consequência que $C + D < 180º$, o que contraria a hipótese ou $A < 60º$ o que teria como consequência que $C + D > 180º$, o que contraria a hipótese.

Fica demonstrada a equivalência (F) $\Leftrightarrow$ (D).

Vamos agora demonstrar que $(F) \Leftrightarrow (E)$.

Seja $A = 60º$. Já vimos que esta igualdade é equivalente à igualdade $C + D = 180º$. Assim, $3A + C + D = 3 \times 60º + 180º = 360º$.

Vamos mostrar que $(D) \Leftrightarrow (E)$.

De modo análogo se demonstra esta equivalência.

Seja $2C + 2D = 360º \Leftrightarrow C + D = 180º$. Já vimos que esta igualdade é equivalente à igualdade $A = 60º$. Logo, $3A + C + D = 3 \times 60º + 180º = 360º$.

Vamos mostrar que $(D) \Leftrightarrow (A)$.

Começamos por mostrar que $(D) \Rightarrow (A)$.

Suponhamos, por hipótese que $2C + 2D = 360º$, isto é $C + D = 180º$. Sabemos que $A + B + C + D + E = 540º$. Destas duas igualdades, resulta que $A + B + E = 360º$.

Por outro lado, para demonstrar que $(A) \Rightarrow (D)$, começamos por supor que $A + B + E = 360º$. Sabemos que $A + B + C + D + E = 540º$. Destas duas igualdades, resulta que $C + D = 180º$, isto é, $2C + 2D = 360º$.

Vejamos agora que $(F) \Rightarrow (B)$.

Considerando por hipótese que $A = 60º$, demonstrar que $2A + B + C = 360º$ é equivalente a demonstrar que $B + C = 240º$.

Observando a figura 23, podemos escrever as seguintes igualdades:

$B - 60º + C = 180º \Leftrightarrow B + C = 240º$.

Vamos agora demonstrar que $(F) \Rightarrow (C)$.

Esta demonstração é análoga à demonstração anterior.

Considerando por hipótese que $A = 60º$, demonstrar que $2A + D + E = 360º$ é equivalente a demonstrar que $D + E = 240º$.

Observando a figura 23, podemos escrever as seguintes igualdades:

$D + (E - 60º) = 180º \Leftrightarrow D + E = 240º$, porque os ângulos D e $E - 60º$, são ângulos consecutivos do quadrilátero $[BCDE]$.

Vejamos agora que $(B) \Rightarrow (F)$

Por hipótese temos a seguinte igualdade: $2A + B + C = 360º$.

Consideremos o pentágono convexo equilátero $[ABCDE]$, no referencial cartesiano, xOy, coincidindo o ponto A com a origem e B pertencente ao semieixo positivo Ox. Podemos escrever que $A(0,0)$, $B(1,0)$.

A demonstração será baseada na figura 26. Começamos por escrever o comprimento $\overline{DE}$, à custa dos ângulos A e B. Como sabemos que $\overline{DE}^2 = 1$, então será estabelecida uma relação entre os ângulos A e B que permitirá obter a nossa tese.

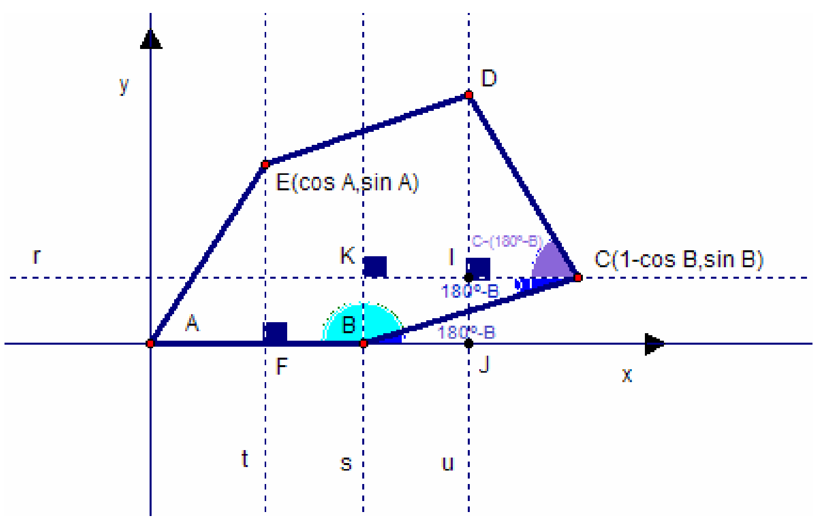


Figura 26

Consideremos a recta r, paralela à recta AB e que passa pelo vértice C e a recta s, perpendicular à recta AB e que passa pelo vértice B. Seja K o ponto de intersecção das duas rectas r e s.

Considerando o triângulo $\triangle[BKC]$, rectângulo em K, podemos escrever as coordenadas do vértice C da seguinte forma:

C ($\overline{AB}$ + cos (180º- B), sin (180º- B)) = (1-cos B , sin B).

Pelo vértice E, traçamos a recta t, perpendicular à recta AB. Seja F o ponto de intersecção das duas rectas. Consideremos o triangulo $\triangle[AFE]$, rectângulo em F. Podemos escrever que: E (cosA, sinA).

Pelo vértice D traçamos uma outra recta u, perpendicular à recta AB.

Seja I o ponto de intersecção das rectas r e u e J o ponto de intersecção das rectas u e recta AB. Podemos escrever que: D $(1+\overline{KI}, \overline{DJ}) =$ ($1+(\overline{KC}-\overline{IC})$, $\overline{DI}+\overline{IJ}$).

Considerando o triângulo $\triangle[DIC]$, rectângulo em I, podemos escrever que:

$\overline{IC} = \cos(C-(180º-B)) = \cos(C+B-180º)$;

$\overline{DI} = \sin(C-(180º-B)) = \sin(C+B-180º)$.

Considerando o triangulo rectângulo $\triangle[BKC]$, rectângulo em K, podemos escrever que: $\overline{KC} = \cos(180º-B) = -\cos B$; $\overline{KB} = \sin(180º-B) = \sin B$

Por outro lado, $\overline{IJ} = \overline{KB} = \sin B$.

Escrevemos finalmente as coordenadas do vértice D à custa dos ângulos B e C:

$$D = (1+(-\cos B - \cos(C+B-180º)), \sin(C+B-180º)+\sin B)$$

$$\Leftrightarrow D = (1-\cos B - \cos(C+B-180º), \sin(C+B-180º)+\sin B).$$

Assim,

$$\overrightarrow{DE} = (\cos A - 1 + \cos B + \cos(C+B-180º), \sin A - \sin(C+B-180º) - \sin B)$$

Por hipótese temos $2A+B+C=360º$, então, $B+C=360º-2A$. Podemos agora simplificar a expressão de $\overrightarrow{DE}$.

$$\overrightarrow{DE} = (\cos A - 1 + \cos B + \cos(360^o - 2A - 180^o), \sin A - \sin(360^o - 2A - 180^o) - \sin B)$$

$$= (\cos A - 1 + \cos B + \cos(180^o - 2A), \sin A - \sin(180^o - 2A) - \sin B)$$

$$= (\cos A - 1 + \cos B - \cos(2A), \sin A - \sin(2A) - \sin B)$$

Dado que $\overline{DE}^2 = 1$, tem-se:

$$(\cos A - 1 + \cos B - \cos(2A))^2 + (\sin A - \sin(2A) - \sin B)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow (\cos A - 1)^2 + (\cos B - \cos(2A))^2 + 2(\cos A - 1)(\cos B - \cos(2A)) + (\sin A - \sin(2A))^2$$

$$+ \sin^2 B - 2(\sin A - \sin(2A))\sin B = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 A + 1 - 2\cos A + \cos^2 B + \cos^2(2A) - 2\cos B\cos(2A) + 2\cos A\cos B$$

$$-2\cos A\cos(2A)$$

$$-2\cos B + 2\cos(2A) + \sin^2 A + \sin^2(2A) - 2\sin A\sin(2A) + \sin^2 B - 2\sin A\sin B$$

$$+2\sin(2A)\sin B = 1$$

$$\Leftrightarrow 4 - 2\cos A - 2\cos B\cos(2A) + 2\cos A\cos B - 2\cos A\cos(2A) - 2\cos B$$

$$+2\cos(2A) - 2\sin A\sin(2A) - 2\sin A\sin B + 2\sin(2A)\sin B = 1$$

$$\Leftrightarrow 4 - 2\cos A - 2(\cos B\cos(2A) - \sin B\sin(2A)) + 2(\cos A\cos B - \sin A\sin B)$$

$$-2(\cos A\cos(2A) + \sin A\sin(2A)) - 2\cos B + 2\cos(2A) = 1$$

$$\Leftrightarrow 4 - 2\cos A - 2\cos(B + 2A) + 2\cos(A + B) - 2\cos(A - 2A) - 2\cos B + 2\cos(2A) = 1$$

$$\Leftrightarrow 3 - 4\cos A + 2\cos(2A) = 2\cos B + 2\cos(B + 2A) - 2\cos(A + B)$$

$$\Leftrightarrow 3-4\cos A+2\cos(2A)=2\cos B+2(\cos B\cos(2A)-\sin B\sin(2A))$$

$$-2\cos(A+B)$$

$$\Leftrightarrow 3-4\cos A+2\cos(2A)=2\cos B+2(\cos B(1-2sin^2 A)-2\sin B\sin A\cos A)$$

$$-2\cos(A+B)$$

$$\Leftrightarrow 3-4\cos A+2\cos(2A)=2\cos B+2\cos B-4\sin^2 A\cos B-4\sin B\sin A\cos A$$

$$-2\cos(A+B)$$

$$\Leftrightarrow 3-4\cos A+2\cos(2A)=4\cos B-4((1-\cos^2 A)\cos B+\sin B\sin A\cos A)$$

$$-2\cos(A+B)$$

$$\Leftrightarrow 3-4\cos A+2\cos(2A)=4\cos B-4\cos B+4(\cos^2 A\cos B)-4\sin B\sin A\cos A$$

$$-2\cos(A+B)$$

$$\Leftrightarrow 3-4\cos A+2\cos(2A)=4\cos A(\cos A\cos B-\sin A\sin B)-2\cos(A+B)$$

$$\Leftrightarrow 3-4\cos A+2\cos(2A)=4\cos A\cos(A+B)-2\cos(A+B)$$

$$\Leftrightarrow 3-4\cos A+2\cos(2A)=2(2\cos A-1)\cos(A+B)$$

$$\Leftrightarrow 1-4\cos A+2(1+\cos(2A))=2(2\cos A-1)\cos(A+B)$$

$$\Leftrightarrow 1-4\cos A+2(2\cos^2 A)=2(2\cos A-1)\cos(A+B)$$

$$\Leftrightarrow 1-4\cos A+4\cos^2 A=2(2\cos A-1)\cos(A+B)$$

$$\Leftrightarrow (1-2\cos A)^2=-2(1-2\cos A)\cos(A+B)$$

$$\Leftrightarrow (1-2\cos A)(1-2\cos A+2\cos(A+B))=0$$

$$\Leftrightarrow 1-2\cos A=0 \quad \vee \quad 1-2\cos A+2\cos(A+B)=0$$

$$\Leftrightarrow 1-2\cos A=0 \quad \vee \quad \cos A-\cos(A+B)=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos A=\frac{1}{2} \quad \vee \quad \cos A-\cos(A+B)=\frac{1}{2}.$$

A primeira das condições desta disjunção é equivalente a $A=60^{\circ}$, uma vez que $arc\cos(\frac{7}{8}) \le A \le 108^{\circ}$.

Vamos agora mostrar que a segunda condição, da disjunção, não é verificada, pelo que poderemos concluir que $A=60^{\circ}$, ficando desta forma concluída a demonstração.

Consideremos então a condição: $\cos A-\cos(A+B)=\frac{1}{2}$.

Da proposição 3, sabemos que $D=arc\cos(\cos A+\cos B-\cos(A+B)-\frac{1}{2})$. Logo resulta que:

$D=arc\cos(\cos B)=B$, isto é, $D=B$.

Por outro lado sabemos que $A \le C \le D \le E \le B$**.** Podemos então concluir que $D=E=B$.

Nestas condições vamos poder concluir que $A=C$. Vejamos.

Observemos a figura seguinte, onde $D=E=B$.

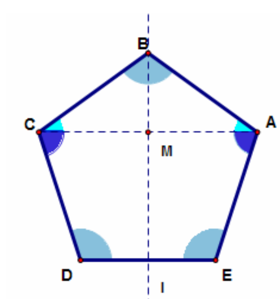


Figura 27

O trapézio $[ACDE]$ é isósceles. Seja l, o eixo de simetria deste trapézio que sabemos ser perpendicular à diagonal $[CA]$ e que passa pelo seu ponto médio, M. Como B pertence à mediatriz de $[CA]$, então o vértice B pertence a este eixo de simetria. Podemos concluir que $A\hat{C}D = E\hat{A}C$. Por outro lado o triângulo $\triangle[BCA]$ é isósceles. Logo os ângulos opostos aos lados iguais são também iguais. Assim, estamos em condições de podermos concluir que $B\hat{C}D = B\hat{A}E$, isto é, $A = C$.

Consideremos a figura 28. Como $D = B$, então a bissectriz, m, do ângulo em C, é eixo de simetria do pentágono. Este eixo é perpendicular ao lado $[EA]$, logo $E = A$. Como $A \leq C \leq D \leq E \leq B$, resulta que $A = C = D = E$.

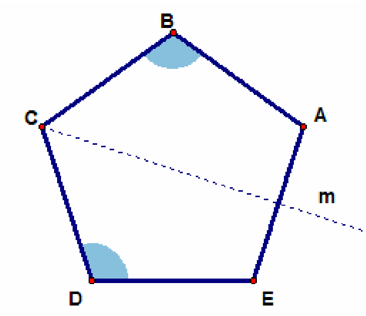


Figura 28

Finalmente concluímos que $A = B = C = D = E$. O pentágono é regular e tem os ângulos internos iguais, logo $A = B = C = D = E = 108^{\circ}$.

Mas por hipótese, temos a seguinte igualdade: $2A + B + C = 360^{\circ}$, que não é satisfeita pelo facto dos ângulos internos do pentágono serem iguais a 108º.

Assim, a condição, $\cos A - \cos(A + B) = \dfrac{1}{2}$, não é verificada, pelo que poderemos concluir que $A = 60^{\circ}$.

Vejamos agora que $(C) \Rightarrow (F)$.

Por hipótese temos a seguinte igualdade: $2A + D + E = 360^{\circ}$.

Consideremos o pentágono convexo equilátero $[ABCDE]$, no referencial cartesiano, coincidindo o vértice A com a origem e o vértice E pertencente ao semieixo positivo Ox. Podemos escrever que $A(0,0)$, $E(1,0)$.

A demonstração será baseada na figura 29.

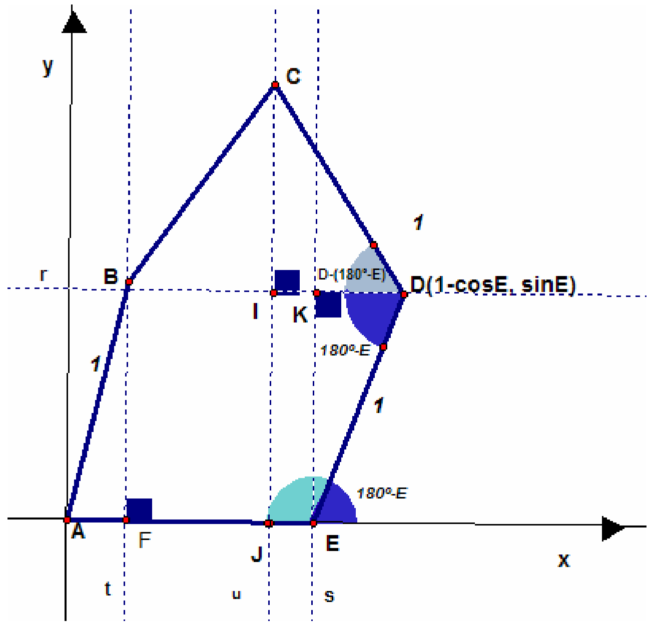


Figura 29

Consideremos a recta r paralela à recta AE e que passa por D e a recta s perpendicular à recta AE e que passa pelo vértice E. Seja K o ponto de intersecção das duas rectas r e s.

Considerando o triangulo $\triangle[EKD]$, rectângulo em K, podemos escrever que:

$D\left(\overline{AE}+\cos(180°-E), \sin E\right)=(1-\cos E, \sin E)$

Pelo vértice B traçamos a recta t, perpendicular à recta AE. Seja F o ponto de intersecção destas duas rectas. Consideremos o triangulo $\triangle[AFB]$, rectângulo em F. Podemos escrever que: $B(\cos A, \sin B)$.

Pelo vértice C traçamos uma outra recta u, perpendicular à recta AE.

Seja I o ponto de intersecção destas rectas r e u e J o ponto de intersecção das rectas u e recta AE. Sabemos que: C ($1-(\overline{ID}-\overline{KD})$, $\overline{CI}+\overline{IJ}$).

Considerando o triangulo $\triangle[DIC]$, rectângulo em I, podemos escrever que:

$\overline{ID}=\cos(D-(180°-E))=\cos(D+E-180°)$ e

$\overline{CI}=\sin(D-(180°-E))=\sin(D+E-180°)$.

Considerando o triangulo $\triangle[EKD]$, rectângulo em K, podemos escrever que:

$\overline{KD} = \cos(180º - E) = -\cos E$;

$\overline{IJ} = \overline{KE}$;

$\overline{KE} = \sin(180º - E) = \sin E$.

Escrevemos finalmente as coordenadas do ponto C:

C ($1 - (\overline{ID} - \overline{KD})$, $\overline{CI} + \overline{IJ}$)

$C = (1 - (\cos(D + E - 180º)) - (-\cos E)), \sin(D + E - 180º) + \sin E)$

$C = (1 - \cos E - (\cos(D + E - 180º), \sin(D + E - 180º) + \sin E)$.

Assim,

$\overrightarrow{CB} = (\cos A - 1 + \cos E + (\cos(D + E - 180º), \sin A - \sin(D + E - 180º) - \sin E)$.

Por hipótese temos $2A + D + E = 360º$, então, $D + E = 360º - 2A$. Podemos agora simplificar a expressão de $\overrightarrow{CB}$.

$\overrightarrow{CB} = (\cos A - 1 + \cos E + (\cos(360º - 2A - 180º), \sin A - \sin(360º - 2A - 180º) - \sin E)$

$= (\cos A - 1 + \cos E + (\cos(180º - 2A), \sin A - \sin(180º - 2A) - \sin E)$

$= (\cos A - 1 + \cos E - (\cos(2A), \sin A - \sin(2A) - \sin E)$

Dado que $\overline{CB}^2 = 1$, tem-se:

$(\cos A - 1 + \cos E - \cos(2A))^2 + (\sin A - \sin(2A) - \sin E)^2 = 1$

$\Leftrightarrow (\cos A - 1)^2 + (\cos E - \cos(2A))^2 + 2(\cos A - 1)(\cos E - \cos(2A)) + (\sin A - \sin(2A))^2$

$+ \sin^2 E - 2(\sin A - \sin(2A)) \sin E = 1$

$\Leftrightarrow \cos^2 A + 1 - 2\cos A + \cos^2 E + \cos^2(2A) - 2\cos E \cos(2A) + 2\cos A \cos E$

$-2\cos A \cos(2A) - 2\cos E + 2\cos(2A) + \sin^2 A + \sin^2(2A) - 2\sin A \sin(2A)$

$+ \sin^2 E - 2\sin A \sin E + 2\sin(2A) \sin E = 1$

$$\Leftrightarrow 4-2\cos A-2\cos E\cos(2A)+2\cos A\cos E-2\cos A\cos(2A)-2\cos E$$

$$+2\cos(2A)-2\sin A\sin(2A)-2\sin A\sin E+2\sin(2A)\sin E=1$$

$$\Leftrightarrow 4-2\cos A-2\cos E\cos(2A)-\sin E\sin(2A))+2(\cos A\cos E-\sin A\sin E)$$

$$-2(\cos A\cos(2A)+\sin A\sin(2A))-2\cos E+2\cos(2A)=1$$

$$\Leftrightarrow 4-2\cos A-2\cos(E+2A)+2\cos(A+E)-2\cos(A-2A)-2\cos E+2\cos(2A)=1$$

$$\Leftrightarrow 3-4\cos A+2\cos(2A)=2\cos E+2\cos(E+2A)-2\cos(A+E)$$

$$\Leftrightarrow 3-4\cos A+2\cos(2A)=2\cos E+2(\cos E\cos(2A)-\sin E\sin(2A))$$

$$-2\cos(A+E)$$

$$\Leftrightarrow 3-4\cos A+2\cos(2A)=2\cos E+2\cos E(1-2sin^2 A)-4\sin E\sin A\cos A$$

$$-2\cos(A+E)$$

$$\Leftrightarrow 3-4\cos A+2\cos(2A)=2\cos E+2\cos E-4\sin^2 A\cos E-4\sin E\sin A\cos A$$

$$-2\cos(A+E)$$

$$\Leftrightarrow 3-4\cos A+2\cos(2A)=4\cos E-4((1-\cos^2 A)\cos E+\sin E\sin A\cos A)$$

$$-2\cos(A+E)$$

$$\Leftrightarrow 3-4\cos A+2\cos(2A)=4\cos E-4\cos E+4(\cos^2 A\cos E)-4\sin E\sin A\cos A$$

$$-2\cos(A+E)$$

$$\Leftrightarrow 3-4\cos A+2\cos(2A)=4\cos A(\cos A\cos E-\sin A\sin E)-2\cos(A+E)$$

$$\Leftrightarrow 3-4\cos A+2\cos(2A)=4\cos A\cos(A+E)-2\cos(A+E)$$

$$\Leftrightarrow 3-4\cos A+2\cos(2A)=2(2\cos A-1)\cos(A+E)$$

$$\Leftrightarrow 1-4\cos A+2(1+\cos(2A))=2(2\cos A-1)\cos(A+E)$$

$$\Leftrightarrow 1-4\cos A+2(2\cos^2 A)=2(2\cos A-1)\cos(A+E)$$

$$\Leftrightarrow 1-4\cos A+4\cos^2 A=2(2\cos A-1)\cos(A+E)$$

$$\Leftrightarrow (1-2\cos A)^2=-2(1-2\cos A)\cos(A+E)$$

$$\Leftrightarrow (1-2\cos A)^2=-2(1-2\cos A)\cos(A+E)$$

$$\Leftrightarrow (1-2\cos A)(1-2\cos A+2\cos(A+E))=0$$

$$\Leftrightarrow 1-2\cos A=0 \quad \vee \quad 1-2\cos A+2\cos(A+E)=0$$

$$\Leftrightarrow 1-2\cos A=0 \quad \vee \quad \cos A-\cos(A+E)=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos A=\frac{1}{2} \quad \vee \quad \cos A-\cos(A+E)=\frac{1}{2}.$$

A primeira das condições desta disjunção é equivalente a $A=60°$, uma vez que $arc\cos(\frac{7}{8})\leq A\leq 108°$.

Vejamos que a condição, $\cos A-\cos(A+E)=\frac{1}{2}$, não é válida.

Por hipótese temos que $2A+D+E=360° \Leftrightarrow A+E=360°-(A+D)$. Substituindo na igualdade $\cos A-\cos(A+E)=\frac{1}{2}$, $A+E$ por $360°-(A+D)$, obtemos as seguintes igualdades equivalentes:

$$\cos A-\cos(360°-(A+D))=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos A-\cos(A+D)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos A-\frac{1}{2}=\cos(A+D).$$

Da proposição 3, temos a seguinte igualdade:

$$D=arc\cos(\cos A+\cos B-\cos(A+B)-\frac{1}{2}) \Leftrightarrow \cos D=\cos A+\cos B-\cos(A+B)-\frac{1}{2}$$

$\Leftrightarrow \cos D = \cos A - \frac{1}{2} + \cos B - \cos(A+B)$. Substituindo, nesta igualdade, $\cos A - \frac{1}{2}$ por $\cos\left(A+D\right)$, vem sucessivamente:

$$\cos D = \cos\left(A+D\right) + \cos B - \cos(A+B) \Leftrightarrow \cos D - \cos B = \cos\left(A+D\right) - \cos(A+B)$$

$$\Leftrightarrow -2\sin\left(\frac{D+B}{2}\right)\sin\left(\frac{D-B}{2}\right) = -2\sin\left(\frac{2A+D+B}{2}\right)\sin\left(\frac{D-B}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{D-B}{2}\right)\left(\sin\left(\frac{D+B}{2}\right) - \sin\left(\frac{2A+D+B}{2}\right)\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{D-B}{2}\right) = 0 \vee \sin\left(\frac{D+B}{2}\right) - \sin\left(\frac{2A+D+B}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{D-B}{2}\right) = \sin 0 \vee \sin\left(\frac{D+B}{2}\right) = \sin\left(\frac{2A+D+B}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{D-B}{2} = 180^{\circ} k\right)$$

$$\vee \left(\frac{D+B}{2} = A + \frac{D+B}{2} + 360^{\circ} k \vee \frac{D+B}{2} = 180^{\circ} - A - \frac{D+B}{2} + 360^{\circ} k\right), k \in \mathbb{Z}.$$

$$\Leftrightarrow \left(D = B + 360^{\circ} k\ \right) \vee (A = -360^{\circ} k \vee D + B = 180^{\circ} - A + 360^{\circ} k), k \in \mathbb{Z}.$$

Vamos analisar cada uma destas três igualdades.

Seja $k \in \mathbb{Z}$.

Se $D = B + 360^{\circ} k$, então, se $k = 0$, viria que $D = B$. Nas páginas 48 e 49, apresentamos uma demonstração na qual concluímos que, então, $A = B = C = D = E = 108^{\circ}$. Mas por hipótese, temos a seguinte igualdade: $2A + D + E = 360^{\circ}$, que não é satisfeita pelo facto dos ângulos internos do pentágono serem iguais a 108º. Se k for um valor não nulo, então, ou D é superior a B ou D é negativo, o que é absurdo pois B é o maior dos ângulos e $arc\cos(\frac{1}{4}) < D < 120^{\circ}$.

Se $A = -360^{o}k$, então os valores possíveis para A, sairiam fora do seu intervalo de variação que é, como sabemos, $arc\cos(\frac{7}{8}) < A \leq 108^{o}$.

Se $D + B = 180^{o} - A + 360^{o}k \Leftrightarrow A + D + B = 180^{o} + 360^{o}k$, então, para $k = 0$, viria $A + D + B = 180^{o}$. Como $A + B + C + D + E = 540^{o}$, então destas duas igualdades resultaria a igualdade $C + E = 360^{o}$. Mas com base nos intervalos de variação deste dois ângulos, C e E, $60^{o} < C \leq 108^{o}$ e $108^{o} \leq E < 180^{o}$, concluímos que o intervalo de variação para o ângulo $C + E$ é $168^{o} < C + E < 288^{o}$, pelo que a igualdade $C + E = 360^{o}$ é falsa.

Assim, a condição, $\cos A - \cos(A + E) = \frac{1}{2}$, não é verificada, pelo que poderemos concluir que $A = 60^{o}$.

Definição 2: Um pentágono convexo e equilátero que satisfaça uma das condições (equivalentes) da proposição 7, diz-se um pentágono convexo e equilátero do tipo 1.

Proposição 8: As relações,

5. $B + C + E = 360^{o}$;

24. $2A + 2D = 360^{o}$,

são equivalentes.

Demonstração:

Já vimos que num pentágono convexo e equilátero é válida a seguinte igualdade: $A + B + C + D + E = 540^{o}$. Por hipótese consideremos que $B + C + E = 360^{o}$. Substituindo na igualdade anterior obtemos as seguintes igualdades $A + D = 180^{o} \Leftrightarrow 2A + 2D = 360^{o}$. Supondo agora que $2A + 2D = 360^{o}$, isto é, $A + D = 180^{o}$ e substituindo na igualdade $A + B + C + D + E = 540^{o}$, vem, $B + C + E = 360^{o}$.

Definição 3: Os pentágonos convexos e equiláteros que satisfazem uma das condições (equivalentes) da proposição 8, dizem-se do tipo 2(a).

Proposição 9: As relações,

5. $B + D + E = 360º$

24. $2A + 2C = 360º$

são equivalentes.

Demonstração:

Já vimos que num pentágono convexo e equilátero é válida a seguinte igualdade: $A + B + C + D + E = 540º$. Por hipótese consideremos que $B + D + E = 360º$. Substituindo na igualdade anterior obtemos as seguintes igualdades $A + C = 180º \Leftrightarrow 2A + 2C = 360º$. Supondo agora que $2A + 2C = 360º$, isto é, $A + C = 180º$ e substituindo na igualdade $A + B + C + D + E = 540º$, vem, $B + D + E = 360º$.

Definição 4: Os pentágonos convexos e equiláteros que satisfazem uma das condições (equivalentes) da proposição 9, dizem-se do tipo 2 (b).

Os pentágonos do tipos 2(a) e 2 (b), constituem o tipo 2.

Note-se que os pentágonos convexos e equiláteros do tipo 1 possuem dois ângulos internos adjacentes suplementares e os do tipo 2 possuem dois ângulos internos não adjacentes suplementares.

Todos estes pentágonos pavimentam o plano.

Vamos agora apresentar alguns exemplos de pavimentações do plano por pentágonos convexos e equiláteros.

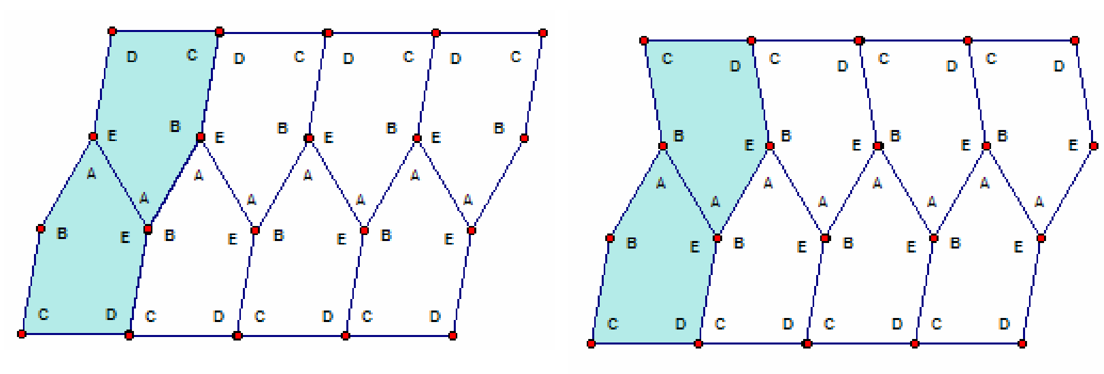


Figura 30

Pentágono do tipo 1 pavimenta o plano de diversas formas.

A=60º ; B=160º ; C = 80º , D = 100º , E = 140º

Vamos de seguida apresentar um exemplo de pavimentação do tipo 2. Qualquer protótipo deste tipo tem dois ângulos não adjacentes suplementares. O exemplo de pavimentação, que a seguir se apresenta na figura 32, é do tipo 2(a) e foi construído com base no protótipo da figura 31.

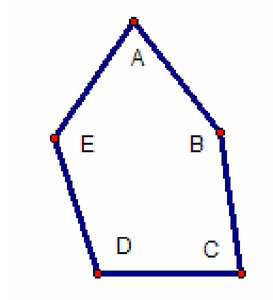


Figura 31

$A = 72^\circ$; $B = 150,06^\circ$; $C = 82,12$; $D = 108^\circ$; $E = 127,82^\circ$

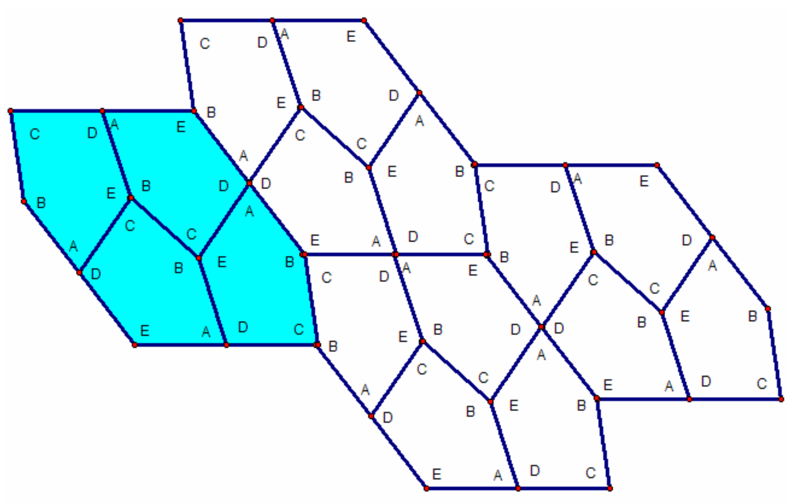


Figura 32

Pentágono do tipo 2 pavimenta o plano

Das 100 relações retiramos as identificadas nas três proposições anteriores, restando ainda 90 relações que são verificadas por algum pentágono convexo e equilátero.

Vamos tipificar os pentágonos que verificam tais relações.

Destas 90 relações existem 14 que envolvem o ângulo B, a saber:

3. $A + 2B = 360^{\circ}$	19. $3A + B = 360^{\circ}$
6. $2B + C = 360^{\circ}$	26. $2A + B + D = 360^{\circ}$
7. $B + 2D = 360^{\circ}$	42. $4A + B = 360^{\circ}$
10. $2B + D = 360^{\circ}$	46. $3A + B + C = 360^{\circ}$
12. $B + 2E = 360^{\circ}$	49. $3A + B + D = 360^{\circ}$
13. $2B + E = 360^{\circ}$	64. $5A + B = 360^{\circ}$
14. $3B = 360^{\circ}$	76. $6A + B = 360^{\circ}$

As últimas 7 relações verificam a desigualdade: $m_A > m_B$, pelo que as 7 primeiras relações que envolvem B não podem pertencer à segunda parte da lista.

Existem pentágonos que satisfazem pelo menos duas relações, incluindo alguma da primeira parte da lista anterior, num total de 54 pentágonos.

3, 6	7, 11	7, 62	10,13
3, 17	7, 17	7, 54	10,12
3, 11	7, 18	7, 65	10,15
2, 7, 21	7, 28	7, 72	10,11
3, 18	7, 8	7, 36	10,16
3, 8, 28	7, 33	7, 52	10,17
3, 19, 38	7, 38	7, 66	11,12,13,14
3, 4, 30	7, 19	7, 73	
3, 31	7, 39	7, 26,42	
3, 39	7, 30	7,68	
3, 40	7, 43	7,55	
6, 7	7, 40	7,84	
6, 11, 32	7, 61	7,74	
6, 17	7,47	7,45,67	
6, 27	7, 51	7,53	
	7, 41	7,77	

Destes cinquenta e quatro pentágonos, apenas três, verificam um conjunto de relações que envolvem os cinco ângulos:

3, 4, 30: $A + 2B = 360º$; $C + 2E = 360º$; $A + C + 2D = 360º$;

3, 8, 28: $A + 2B = 360º$; $D + 2E = 360º$; $A + 2C + D = 360º$;

7, 45, 67: $B + 2D = 360º$; $3A + C + E = 360º$; $4A + 2D = 360º$.

Vamos mostrar que as duas últimas condições não são verificadas por nenhum pentágono convexo e equilátero, pelo facto de uma das suas condições não ser válida por este tipo de pentágonos.

Os pentágonos que verificam a terceira condição não pavimentam o plano. Observemos a figura 33. Suponhamos por redução ao absurdo que existe uma pavimentação para a qual é valida a igualdade $B + 2D = 360º$, num vértice qualquer. Podemos observar que face às hipóteses possíveis para a identificação dos restantes ângulos nos três pentágonos, não vai existir nenhuma relação que envolva apenas os ângulos A e D nos vértices da pavimentação. Assim, a relação $4A + 2D = 360º$ não é válida.

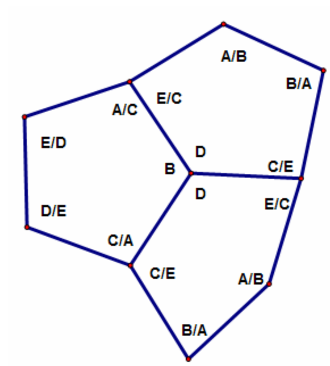


Figura 33

A segunda condição não é verificada por nenhum pentágono que pavimente o plano. Suponhamos por redução ao absurdo que existe uma pavimentação para a qual é valida a igualdade $A + 2B = 360º$, num vértice qualquer. Observando a figura 34, concluiríamos que, ou os ângulos A e E ou os ângulos C e E estariam juntos. Mas estas combinações não ocorrem em nenhuma das igualdades identificadas, o que é absurdo.

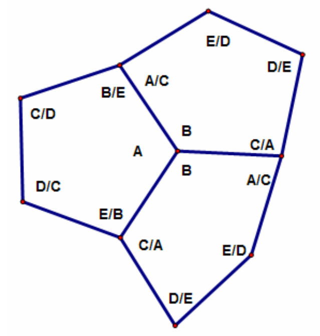
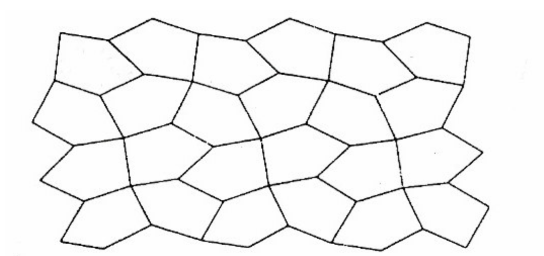


Figura 34

Apenas ficamos com a primeira condição que é verificada por pentágonos que pavimentam o plano para além dos pentágonos já identificados.

Na figura 35, podemos observar um exemplo de uma pavimentação por um pentágono para o qual é verificada esta primeira condição.

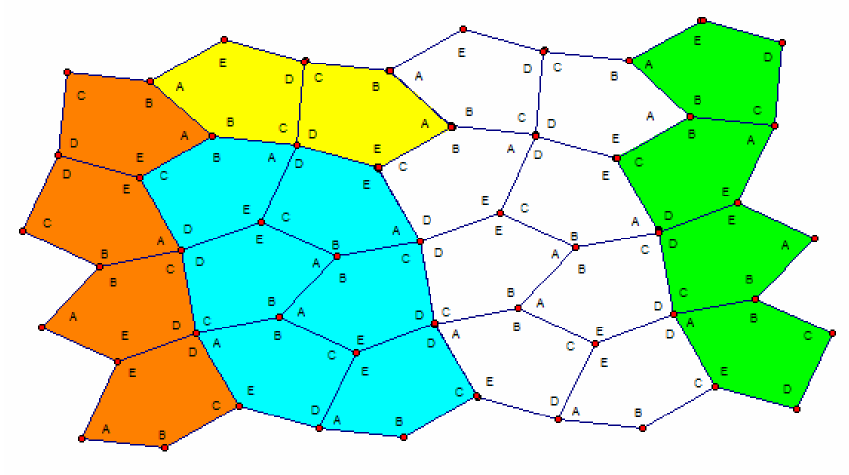


Pavimentação por pentágono convexo e equilátero que pavimenta o plano e satisfazendo as condições

$A+2B=360º$; $C+2E=360º$; $A+C+2D=360º$

Figura 35

Vejamos em pormenor a colocação dos protótipos, nesta pavimentação. No exemplo que se segue, foram utilizadas as seguintes amplitudes: $A=70,878º$; $B=144,561º$; $C=89,264º$; $D=99,929º$ e $E=135,368º$.



Pavimentação por pentágono convexo e equilátero, satisfazendo as condições

$A+2B=360^{\circ}$; $C+2E=360^{\circ}$; $A+C+2D=360^{\circ}$

Figura 36

Uma questão que se pode colocar é a seguinte: dado um protótipo $\mathscr{P}$ (pentágono convexo e equilátero) que pavimente o plano, poderão ser descritas todas as pavimentações, a menos de uma isometria, que tenham $\mathscr{P}$ por protótipo?

Observe-se o seguinte: Considerando-se para ângulos de um protótipo $\mathscr{P}$, $A=60^{\circ}$; $B=160^{\circ}$; $C=80^{\circ}$; $D=100^{\circ}$ e $E=140^{\circ}$, podemos observar, na figura 37, duas formas de pavimentar o plano, não isomorfas[1].

[1]: Duas pavimentações do plano, τ_1 e τ_2, são isomorfas $(\tau_1 \approx \tau_2)$ se $\exists \varphi \in \Im(\mathbb{R}^2) : \varphi(\tau_1) = \tau_2$, onde $\Im(\mathbb{R}^2)$ representa o conjunto das isometrias do plano.

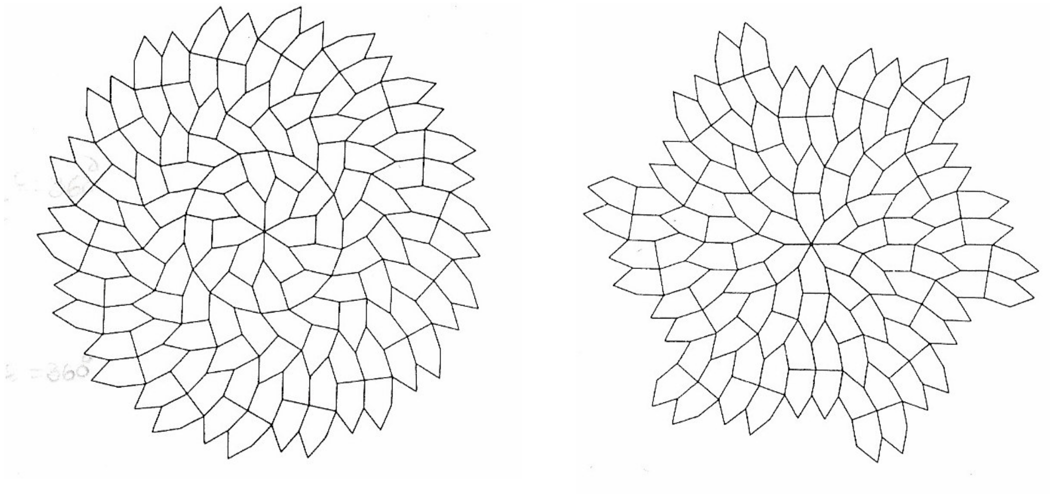


Figura 37

Pavimentações com base no protótipo, onde A=60º ; B=160º ; C=80º ; D=100º e E=140º

Na figura seguinte podemos observar a variação da disposição dos protótipos, relativa às pavimentações anteriores, que origina pavimentações diferentes.

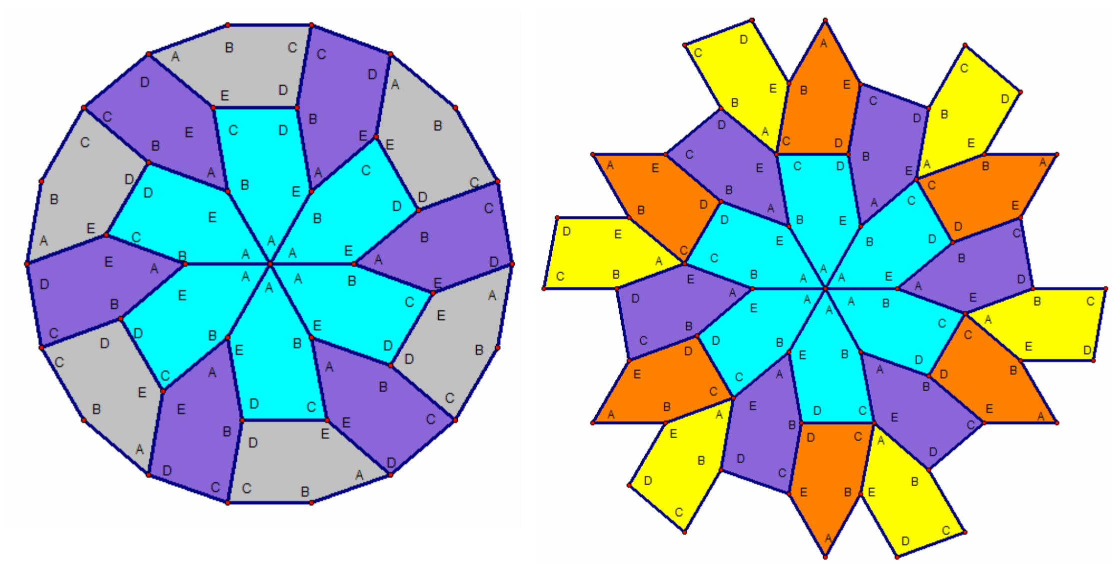


Figura 38

Pavimentações com base no protótipo, onde A=60º ; B=160º ; C=80º ; D=100º e E=140º

No caso do protótipo do tipo 2, $A = 72º$; $B = 150,06º$; $C = 82,12º$; $D = 108º$ e $E = 127,82º$, vimos na página 59, uma pavimentação obtida à custa deste protótipo. É possível obtermos uma outra pavimentação, à custa do mesmo, por simetria rotacional, conforme podemos observar na figura 39.

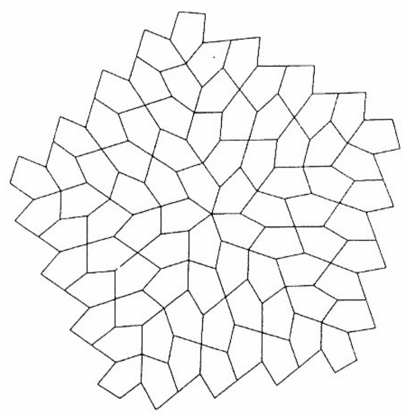


Figura 39

Em pormenor, a colocação dos primeiros protótipos nesta pavimentação, pode ser observada na figura seguinte.

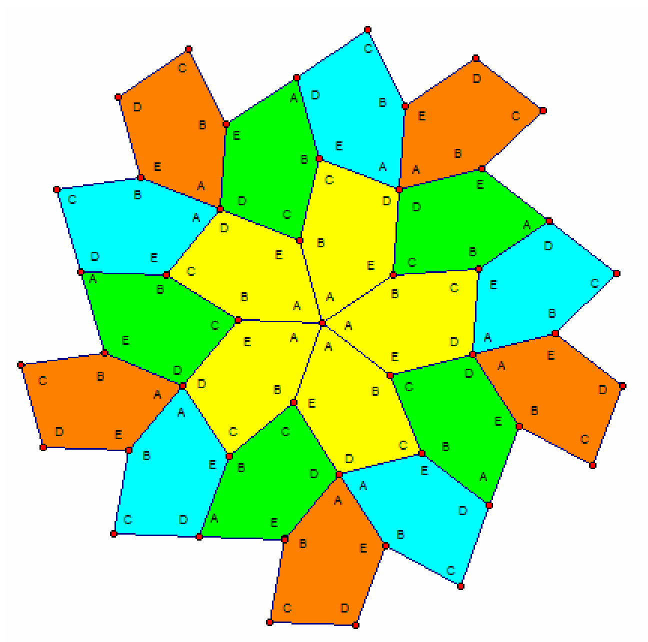


Figura 40

Do exposto, podemos afirmar que os pentágonos convexos e equiláteros que pavimentam o plano ou têm um ângulo de 60º ou dois ângulos não adjacentes suplementares ou verificam as condições:

$A+2B=360^{\circ}$; $C+2E=360^{\circ}$; $A+C+2D=360^{\circ}$.

Bibliografia

1. Doris Schattschneider, “Tiling the Plane with Congruent Pentagons”, Moravian Colege, Bethlem, PA 18018, vol. 51, NO. 1, January 1978.

2. O. Bagina, “Tiling the plane with congruent equilateral convex pentagons”, Department of Algebra and Geometry, Kemerovo State University, Kemerovo, Russia, Jounal of Combinatorial Theory, Series A 105 (2004) 221-232.

3. M.D. Hirschhorn, D. C. Hunt, “Equilateral Convex Pentagons Witch Tile the Plane”, University of New South Wales, Kensington, New South Wales, Autralia 2033.

Endereços electrónicos

http://tessellations.home.comcast.net/~tessellations/, em 26 de Abril de 2008

http://www.geocities.com/liviozuc/pentagons.html, em 26 de Abril de 2008

ÍNDICE